

Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясы
Национальная академия наук Кыргызской Республики
National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic

КР УИА Математика институтунун
Кабарлары

Вестник
Института математики НАН КР

Herald
of Institute of Mathematics of NAS of KR

ON UNIFORM ANALOGUES OF p_τ – SPACES AND PERFECT MAPPINGS.

**Borubaev A.A., Namazova G.O., Jumaliev T.,
Bekbolsunova A.B.**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic, Kyrgyz-Russian
Slavic University named after B.N. Yeltsin, Kyrgyz National Agrarian University named after K.I.
Skryabin, [Kyrgyz State Technical University](#) named after I. Razzakov*

Бул макалада p_τ – мейкиндигинин жана жетик чагылдырууларын бир калыптуу мейкиндигиндеги окшоштуктары каралды. Бир калыптуу $(X, \mathcal{U})$ мейкиндиги салмагы $\mathcal{W}(\mathcal{U}) \leq \tau$ болгон $(Y, \mathcal{V})$ бир калыптуу мейкиндигине бир калыптуу жетик чагылдырылса, анда $(X, \mathcal{U})$ мейкиндиги p_τ – мейкиндиги болуп саналат.

Урунттуу сөздөр: p_τ – мейкиндиги, бир калыптуу жетик мейкиндиги.

В этой статье рассмотрены равномерные аналоги p_τ – пространств и совершенные отображения. А также показано, что равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ можно равномерно совершенно отобразить на некоторое равномерное пространство $(Y, \mathcal{V})$ веса $\mathcal{W}(\mathcal{U}) \leq \tau$, тогда и только тогда, когда $(X, \mathcal{U})$ является равномерно τ – перистым пространством.

Ключевые слова: p_τ – пространство, τ – перистое пространство.

In this paper, consider uniform analogues of p_τ – spaces and perfect mappings. And also It is shown that a uniform space $(X, \mathcal{U})$ can be uniformly perfectly mapped onto some uniform space $(Y, \mathcal{V})$ of weight $\mathcal{W}(\mathcal{U}) \leq \tau$ s, if $(X, \mathcal{U})$ is a uniformly p_τ – space.

Keywords: uniformly p_τ – space, uniformly perfectspace.

Czech mathematician Z. Frolik in 1960 [1] proved the following:

THEOREM (Z. Frolik). Čech-complete paracompacta if and only if they are mapped onto complete metric spaces by means of perfect mappings.

In 1961 at the Symposium in Prague P.S.Alexandroff put forward a hypothesis: “Paracompacta are the perfect preimages of the metric spaces” [2]. However, this hypothesis was not justified: The Sorgenfrei spaces [3] are paracompact spaces [2], but their cartesian square is not a paracompact space [2]. The product of the perfect preimages of the metric spaces is a perfect preimage of the product of the metrizable spaces and hence it is paracompact. Contradiction.

Arhangelskii A.V. introduced the concept of p_τ – space by means of characterization of paracompacta that are perfect preimages of metric spaces [2].

THEOREM (Arhangel'skii, A.V. [4]). In order that the a space X can be perfectly mapped onto some metric space, it is necessary and sufficient to X is a p_τ – space paracompactum.

This theorem not only gave the full answer to the Alexandroff hypothesis, but also sparked a lot of interesting research.

From the beginning, the seventies of the last century and the intensive study of uniform analogues essential classes of topological spaces began such as the paracompact classes, strongly paracompact, Lindelöf, connected and other spaces. The theory of dimension and absolutes (projective objects) of uniform spaces were constructed. There uniform analogues of such important classes of continuous mappings as the class of perfect, closed and quotient mappings were also found and their theories were built.

This talk is devoted to uniform analogues of p_τ – spaces and perfect mappings.

DEFINITION 1. A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is called *uniformly* p_τ – space, where $\aleph_0 \leq \tau \leq w(\mathcal{U})$ if there is a pseudo uniformity $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ satisfying to the following conditions:

$$(1) w(\mathcal{P}) \leq \tau$$

$$(2) \cap \{\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{P}\} = K_x \text{ is compact for all } x \in X .$$

(3) The system $\{\alpha(K_x) : \alpha \in \mathcal{P}\}$ is a fundamental system of neighborhoods of the compact K_x in $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ for each $x \in X$.

Uniformly $\aleph_0$ - p_τ – spaces are called *uniformly* p – space.

Every metrizable uniform space is uniformly p_τ – space and every uniformly p_τ – space is uniformly paracompact.

If X is a p_τ – space paracompact (or traditionally p -paracompact), and $\mathcal{U}^*$ is its universal uniformity, then the uniform space $(X, \mathcal{U}^*)$ is a uniformly p_τ – space.

THEOREM 1. For a uniform space $(X, \mathcal{U})$ the following conditions are equivalent:

1) A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is uniformly p_τ – space.

2) A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is mapped onto some uniform space $(Y, \mathcal{V})$ of weight $w(\mathcal{V}) \leq \tau$ by a perfect uniformly continuous mapping.

COROLLARY. For a uniform space $(X, \mathcal{U})$ the following conditions are equivalent:

(1) The uniform space $(X, \mathcal{U})$ is uniformly p – space.

(2) The uniform space $(X, \mathcal{U})$ is mapped onto some uniform metrizable space $(Y, \mathcal{V})$ by a perfect uniformly continuous mapping.

For the formulation of a complete uniform analogue of the above-mentioned the Arhangelskii theorem on p_τ – space paracompacta, we will need a uniform analogue of perfect mapping. I.A.Weinstein[6] introduced the class of perfect mappings [4].

Let $f:(X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ be a uniformly continuous mapping of uniform space $(X, \mathcal{U})$ to a uniform space $(Y, \mathcal{V})$. Pseudo uniformity $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{U}$ is called a *base* of a uniformly continuous mapping f , if for every $\alpha \in \mathcal{U}$ there exists $\beta \in \mathcal{V}$ and $\gamma \in \mathcal{U}_f$ such that a covering $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ is a refinement of a covering $\alpha \in \mathcal{U}$. In other words, pseudo uniformity $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{U}$ is called a *base* of mapping f , if $\mathcal{V} = \sup\{\mathcal{U}_f, f^{-1}\mathcal{V}\}$, where $f^{-1}\mathcal{V} = \{\alpha \in \mathcal{U} : \text{there is } \beta \in \mathcal{V} \text{ such that } f^{-1}\beta > \alpha\}$.

Every uniformly continuous mapping have, generally speaking, a lot of bases.

DEFINITION 2.A uniformly continuous mapping $f:(X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ of a uniform space $(X, \mathcal{U})$ to a uniform space $(Y, \mathcal{V})$ is called *precompact* if the map f has a precompactbase $\mathcal{U}_f$.

DEFINITION 3.A uniformly continuous mapping $f:(X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ of a uniform space $(X, \mathcal{U})$ to a uniform space $(Y, \mathcal{V})$ is called *uniformly perfect* if it is both precompact and is perfect.

Let $Unif$ be the category of uniform spaces and uniformly continuous maps.

Let us consider in the category $Unif$ the following square:

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{U}) & \xrightarrow{g} & (X_1, \mathcal{U}_1) \\ f \downarrow & & \downarrow f_1 \\ (Y, \mathcal{V}) & \xrightarrow{g_1} & (Y_1, \mathcal{V}_1), \end{array} \quad (1)$$

Square (1) is called pull-back in the category $Unif$ if, firstly, it is commutative and, secondly, for every pair of morphisms $\varphi: (Z, W) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ and $\psi: (Z, W) \rightarrow (X_1, \mathcal{U}_1)$ such that $g_1 \cdot \psi = \varphi \cdot f_1$ there exists a unique morphism $h: (Z, W) \rightarrow (X, \mathcal{U})$ satisfying $\varphi = f \cdot h$ and $\psi = g \cdot h$.

Now we consider in the category the following square:

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{U}) & \xrightarrow{g} & (sX, s\mathcal{U}) \\ f \downarrow & & \downarrow s(f) \\ (Y, \mathcal{V}) & \xrightarrow{g_1} & (sY, s\mathcal{V}), \end{array} \quad (2)$$

where $(sX, s\mathcal{U})$ and $(sY, s\mathcal{V})$ are Samuel compact extensions of uniform spaces $(X, \mathcal{U})$ and $(Y, \mathcal{V})$ respectively, $s(f)$ is an extension of f , and i_X and i_Y are uniformly homeomorphic embeddings. Square (2) is commutative, but is not always pull-back in the category $Unif$.

The following theorem gives a categorical characteristic of uniformly perfect mappings.

THEOREM 2. A mapping $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ of a uniform space $(X, \mathcal{U})$ onto a uniform space $(Y, \mathcal{V})$ is uniformly perfect if and only if the square (2) pull-back on the category $Unif$.

The role of uniformly perfect maps among all uniformly continuous maps to some extent is revealed by the following theorem:

THEOREM 3. Let $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ be a uniformly perfect mapping of a uniform space $(X, \mathcal{U})$ onto a uniform space $(Y, \mathcal{V})$. Then the following properties are direct and inverse invariants:

1. Completeness and index of completeness;

2. Precompactness;
3. τ -boundedness;
4. Uniform locally compactness;
5. Uniform Čech-completeness;
6. Uniform R -paracompactness;
7. p_τ -space.

THEOREM 4. For a uniform space $(X, \mathcal{U})$ the following conditions are equivalent:

1. Uniform space $(X, \mathcal{U})$ weight $w(\mathcal{U}) \leq \tau$ can be uniformly perfect mapped onto some uniform space $(Y, \mathcal{V})$;
2. Uniform space of weight $w(\mathcal{U}) \leq \tau$ is uniformly isomorphic to the closed subspace of the product of a uniform space $(Y, \mathcal{V})$ on some compact.

DEFINITION 4. Let $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ uniformly continuous mapping. The mapping f is said to be *complete*, if any Cauchy filter $\mathcal{F}$ in $(X, \mathcal{U})$ for some $f\mathcal{F}$ converges $(Y, \mathcal{V})$, in converges in $(X, \mathcal{U})$.

Consider the following square in the category $Unif$;

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{U}) & \xrightarrow{i_X} & (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{U}}) \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ (Y, \mathcal{V}) & \xrightarrow{i_Y} & (\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{V}}), \end{array} \quad (3)$$

where $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{U}})$ and $(\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{V}})$ are completions of uniform spaces $(X, \mathcal{U})$ and $(Y, \mathcal{V})$, respectively, i_X and i_Y are uniform embedding and $\tilde{f}$ is a unique extension of the mapping f .

It is easy to see that square (3) is commutative, but not necessarily pull-back in the category $Unif$.

THEOREM 5. For a uniformly continuous mapping $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ of a uniform space $(X, \mathcal{U})$ onto a uniform space $(Y, \mathcal{V})$ the following conditions are equivalent:

1) The mapping f is complete.

(2) $f(X \setminus X) \subseteq Y \setminus Y$.

(3) The square (3) is pull - back category $Unif$.

The following theorem extends to the uniformly continuous maps the following fundamental fact: a uniform space is compact if and only if it is complete and precompact.

THEOREM 6. A mapping $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ of a uniform space $(X, \mathcal{U})$ onto a uniform space $(Y, \mathcal{V})$ is uniformly perfect if and only if it is complete and precompact.

DEFINITION 5. Let $\bar{f}: (\bar{X}, \bar{\mathcal{U}}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ be uniformly continuous mapping of a uniform space $(\bar{X}, \bar{\mathcal{U}})$ to a uniform space $(Y, \mathcal{V})$. A uniformly continuous mapping $\bar{f}: (\bar{X}, \bar{\mathcal{U}}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ of a uniform space $(\bar{X}, \bar{\mathcal{U}})$ to a uniform space $(Y, \mathcal{V})$ is called *the completion of the mapping f* if the following conditions hold:

1) The uniform space $(X, \mathcal{U})$ is a dense uniform space of the uniform space $(\bar{X}, \bar{\mathcal{U}})$.

2) $f = \bar{f} \upharpoonright X$

3) The mapping $\bar{f}$ is complete.

THEOREM 7. Every uniformly continuous mapping $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ of a uniform space $(X, \mathcal{U})$ to a uniform space $(Y, \mathcal{V})$ has a unique, up to isomorphism uniform completion.

THEOREM 8. For a uniformly continuous mapping $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ of a uniform space $(X, \mathcal{U})$ onto a uniform space $(Y, \mathcal{V})$ the following conditions are equivalent:

(1) The mapping f is precompact.

(2) Completion $\bar{f}$ of f is precompact.

(3) Completion $\bar{f}$ of f is uniformly perfect.

DEFINITION 6. Let $(X, \mathcal{U})$ be a uniformly p_τ -space, and $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ be a pseudo uniformity, satisfying conditions 1) -3) of definition 1. Uniform space $(X, \mathcal{U})$ is called *uniformly* A_τ -spaces, if there exists a precompact pseudo uniformity $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$, where $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{P}, \mathcal{U}\}$.

THEOREM 9. In order to a uniform space $(X, \mathcal{U})$ can be uniformly perfectly mapped onto some uniform space $(Y, \mathcal{V})$ of weight $w(\mathcal{V}) \leq \tau$, it is necessary and sufficiently to be uniform p_τ -space.

COROLLARY. In order to a uniform space $(X, \mathcal{U})$ can be uniformly perfectly mapped onto a uniform metric space, it is necessary and sufficiently to be uniformly p -space.

REMARK 1. If uniformity $\mathcal{U}$ is a maximal uniformity, then from above stated results imply many topological results, in particular, the last corollary turns to the Arhangel'skii theorem.

REMARK 2. Similarly, uniform analogues of the Čech-complete spaces are defined and the uniform analogue above the given Frolik theorem. In 1963, Japanese mathematician K. Morita introduced the class of M -spaces and built their theory [9]. In the class of paracompact M -space, coincide with the class of p -spaces. M -spaces is precisely quasi-perfect preimages of metric spaces. Uniform analogues of the theory M -spaces were constructed.

References

1. Frolik Z. On the topological product of paracompact spaces // Bull. Acad. Pol.Sci. Ser. Math. 8 (1960) p. 147–750.
2. Arhangel'skii A.V. Mappings and spaces // UMN. 21 (1966), №. 4, p.133-184.
3. Sorgenfrey R.H. On the topological product of paracompact spaces // Bull.Amer. Math.Soc.53 (1947), p. 631-184.
4. Arhangel'skii A.V. On one class of spaces containing all metric and all locally bicomact spaces // Math.Sb. 67 (109), (1965), №. 1, p. 55-85.

5. Borubaev A.A. Uniform spaces and uniformly continuous mappings. Frunze. Ilim, 1990, p. 1-170.
6. Weinstein I.A. On closed mappings of metric spaces // DAN SSSR. 57 (1947), p. 319-321.
7. Borubaev A.A. Uniformly perfect mappings. Absolutes of uniform spaces // Docl. Bolg.AN. (1989) V.42, p. 19-23
8. Borubaev A.A. Uniform topology. - Bishkek, (2013), p. 1-337.
9. Morita K. On the product of a normal spaces with a metric spaces // Proc. Japan Acad. 39 (1963), p. 148-150.

MSC 70F99

ЯВЛЕНИЕ САМОУПОРЯДОЧЕНИЯ БОЛЬШОГО КОЛИЧЕСТВА ОТТАЛКИВАЮЩИХСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ НА ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ТОРЕ

Панков П.С., Тагаева С.Б.

Институт математики НАН КР

Көптүүчүлүк эффектинин натыйжасы катары, төмөнкү иреттөөнүн синергетикалык кубулушу сандуу тажрыйбалар аркылуу ачылды. Топологиялык шакекте, кокустан баштапкы жайлаштыруудан, Кулон закону боюнча түртүлүүчү, бирдей электр заряддардын кыймылдоосун компьютерде моделдештирди. Заряддардын саны жетишээрлик (100дөн) көп болгондо, алардын акыркы жайгаштыруусу регулярдык тор түрүндө пайда болот. Заряддардын саны жуп сандын квадраты болгондо аракеттердин көбүндө туура чарчы тор, ал эми так сандын квадраты болгондо аракеттердин көбүндө туура үч бурчтук тор пайда болот.

Урунттуу сөздөр: көптүүчүлүк эффекти, синергетика, кубулуш, Кулон закону, электр заряддар

Как следствие эффекта множественности, следующее синергетическое явление упорядочивания было обнаружено численными экспериментами. На компьютере было моделировано движение отталкивающихся по закону Кулона одинаковых электрических зарядов из случайного начального расположения на топологическом торе. Когда количество зарядов достаточно (больше 100) велико, их окончательное расположение образует регулярную сетку. Когда количество зарядов является квадратом четного числа, в большинстве попыток появляется правильная квадратная сетка, а квадратом нечетного числа - в большинстве попыток появляется правильная треугольная сетка.

Ключевые слова: эффект множественности, синергетика, явление, численный эксперимент, закон Кулона, электрические заряды

As a consequence of the effect of numerosity, the following synergetic phenomenon of regularity was opened by means of numerical experiments. Motion of equal, repelling by the Coulomb law electrical charges from a random initial distribution on a topological torus form a final regular grid was modeled by computer. When the number of charges is a square of even

number then the grid is square in most of experiments; when it is a square of odd number then the grid is triangular in most of experiments.

Keywords: effect of numerosity, synergetic, phenomenon, numerical experiment, Coulomblaw, electricalcharges

1. Введение. При поиске новых эффектов и явлений в Институте математики был обнаружен эффект множественности [1]-[4]. Было введено ([1], с уточнениями)

О п р е д е л е н и е 1. Диссипативная система – это такая полностью ограниченная (компактная) система, имеющая достаточно большое количество возможных состояний и переходов между ними, что энтропия входящей энергии (вводится ограничено по мощности, но неограниченно по времени)значительно меньше энтропии выходящей энергии. Таким образом, внутренняя энтропия уменьшается, что эквивалентно возникновению упорядоченности.

Этот эффект был применен для поиска упорядоченности при движении электрических зарядов в вязкой среде [5]-[9]. Для удобства программирования и представления результатов был выбран топологический тор - квадрат со склеенными противоположными сторонами.

2. Постановка задачи и расчетная программа. На топологическом торе в вязкой среде случайным образом располагаются одноименные электрические заряды. После этого они начинают отталкиваться по закону Кулона, пока не почти остановятся.

Тогда движение N зарядов описывается системой N двумерных дифференциальных уравнений. Вследствие вязкости были взяты уравнения первого порядка. Их особенностью является то, что правые части разрывны, но решения – непрерывные и гладкие. Для учета особенностей топологии учитывается отталкивание каждого заряда только от близких зарядов.

Была составлена следующая программа с графической демонстрацией начального и конечного расположения зарядов (в тексте $N=256$).

PROGRAM sab_3;

```

USES CRT, graph;
var hxy,vx,vy,dx,dy,dxy,dxy1,hxy1,z,z2,xj,yj,dxy2,dxyd: double;
I,j,nxy,it,nt,np,ihand,n_time,ik: longint;
vardrv, mode,f,n: integer;
x,y:array[1..300] of double;
xn,yn:array[1..300] of integer;
begin {main}
drv:=0; mode:=VgaHi;
InitGraph(drv,mode,'c:\tp\bgi');
randomize;
SetTextStyle(0,0,2);
OutTextXY(30,20,'Pankov, Tagaeva, 2018. Repelling 256 electrical charges
on torus');
OutTextXY(100,40,'(Wait a little)');
z:=700.; z2:=z/2.0;
np:=10; {nt:=500*n_time;} hxy:=1.0; hxy1:=hxy; nt:=1000; nxy:=256;
forik:=1 to nxy do begin x[ik]:=z*random; y[ik]:=z*random;
xn[ik]:=round(x[ik]); yn[ik]:=round(y[ik]);
SetColor(green); circle(xn[ik]+80,yn[ik]+70,2);
end;
for it:=0 to nt do
begin {it} if it>np then hxy:=2.0*hxy1;
if it>2*np then hxy:=4.0*hxy1;
for i:=1 to nxy do
begin {i=ix} vx:=0.; vy:=0.; for j:=1 to nxy do
begin if j<>I then begin
xj:=x[j]; if xj>x[i]+z2 then xj:=xj-z; if xj<x[i]-z2 then xj:=xj+z;
yj:=y[j]; if yj>y[i]+z2 then yj:=yj-z; if yj<y[i]-z2 then yj:=yj+z;
dxy2:=sqr(x[i]-xj)+sqr(y[i]-yj)+1.;
dxy1:=z/(dxy2*sqrt(dxy2)); if dxy1<sqr(z)/nxy*0.5 then begin

```



```

dx:=(x[i]-xj)*dxy1; dy:=(y[i]-yj)*dxy1;
vx:=vx+dx; vy:=vy+dy; end;
end; end;
x[i]:=x[i]+vx*hxy; if x[i]>z then x[i]:=x[i]-z; if x[i]<0. Then x[i]:=x[i]+z;
y[i]:=y[i]+vy*hxy; if y[i]>z then y[i]:=y[i]-z; if y[i]<0. Then y[i]:=y[i]+z;
end {i=ix};
forik:=1 to nxy do begin xn[ik]:=round(x[ik]);
yn[ik]:=round(y[ik]) end;
{forik:=1 to nxy do write(xn[ik]:5,yn[ik]:5); writeln;
readln;}
end {it};
Setcolor(white);
repeat
for ik:=1 to nxy do begin circle(xn[ik]+80,yn[ik]+70,8);
circle(xn[ik]+80,yn[ik]+70,6); circle(xn[ik]+80,yn[ik]+70,4);
circle(xn[ik]+80,yn[ik]+70,2) end;
delay(100);
untilkeypressed;
END.

```

3. Результаты численных экспериментов. Для десяти, двадцати, тридцати ... зарядов получающиеся равновесные расположения были разнообразными и не имели никаких общих закономерностей, заряды располагались треугольниками, четырехугольниками, пятиугольниками ...

Начиная со 100 зарядов, уже стали появляться регулярные области, а после 200 выявилась закономерность, в особенности для количеств зарядов - квадратов чисел.

Так, для 256 зарядов в большинстве попыток (поскольку исходные данные случайны), образуется правильная квадратная сетка, а для 289 зарядов - правильная треугольная сетка. Такая же закономерность появилась и для других квадратных чисел.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Kenenbaeva G.M., Tagaeva S. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014). – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 107-111.

2. Pankov P. S., Kenenbaeva G. M. Hypothesis on effect of "numerosity" and other effects in mathematics // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017, № 5. - С. 60-62.

3. Pankov P., Kenenbaeva G. Effect of "numerosity" and other effects in mathematics // Abstracts of the Third International Scientific Conference "Actual problems of the theory of control, topology and operator equations" / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2017. – P. 87.

4. Kenenbaeva G. On mathematical effects // Abstracts of the VI Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Astana: L.N.Gumilyov Eurasian National University, 2017. - P. 320.

5. Pankov P., Tagaeva S. Mathematical modeling of distribution of discrete electrical charges // Abstracts of the V International Scientific Conference “Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics” devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek, 2016. – P. 58.

6. Тагаева С.Б. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, описывающих отталкивание частиц // Вестник Жалал-Абадского государственного университета, 2016, № 1(32). – С.78-82.

7. Тагаева С.Б. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, описывающих отталкивание частиц с различными зарядами // Естественные и математические науки в современном мире / Сб. статей по материалам XLIX междунар. научно-практ. конф. № 12 (47). Новосибирск: Изд. АНС «СибАК», 2016.– С. 85-91.

8. Тагаева С.Б. Система обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, описывающих отталкивание частиц на окружности // Естественные и математические науки в современном мире / Сб. статей по материалам XLIX междунар. научно-практ. конф. № 12 (47). Новосибирск: Изд. АНС «СиБАК», 2016.– С. 91-95.

9. Панков П.С., Тагаева С.Б. Условия гладкости решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Доклады НАН КР, 2016, № 2. - С. 26-30.

7. Tagaeva S.B. Existence and stabilization of solution of system of differential equations describing arrangement of many discrete electrical charges on a segment // Интернет-журнал ВАК КР, 2017, № 1. - 6 с.

8. Tagaeva S. Example of trifurcation of distribution of repelling electrical charges // Abstracts of the Third International Scientific Conference "Actual problems of the theory of control, topology and operator equations" / Ed. by Academician A. Borubaev. - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2017. – P. 89.

9. Тагаева С.Б. Экспериментальное исследование распределения электрических зарядов в ограниченных областях // Тезисы докладов II Борубаевских чтений (г. Бишкек, 1 марта 2018 года). - Бишкек: Кыргызское математическое общество, 2018.- С. 32.

MSC 37K20

КОМПЬЮТЕРНОЕ И РЕАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ СТРАННОГО АТТРАКТОРА СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Панков П.С., Тагаева С.Б.

Институт математики НАН КР

Мурунку макалаларда укмуштуу тартып жакындаткычты жүзөгө ашыруунун ыкмалары өтө татаал болду. Бул макалада ал кубулуш үчүр куюп турган жери болгон жылмакай бет боюнча тартуу күчүнүн таасиринен топ жумаланганы аркылуу көрсөтүлөт. Топтун кыймылдаганы алдын ала айтылбайт. Туура келген дифференциалдык тендемелер системасы түзүлдү жана компьютерде болжол менен чыгарылды. Дагы, мындай бет темирден жасалды жана сыналды.

Урунттуу сөздөр: тартып жакындаткыч, жылмакай бет, кубулуш, дифференциалдык тендеме, тендемелер системасы, жүзөгө ашыруу

В предыдущих статьях методы реализации странных аттракторов были слишком сложными. В данной статье такое явление продемонстрировано через скатывание шарика по гладкой поверхности с тремя выступами под воздействием силы тяжести. Движение шарика оказывается непредсказуемым. Соответствующая система дифференциальных уравнений составлена и приближенно решена на компьютере. Также, такая поверхность изготовлена из железа и испытана.

Ключевые слова: аттрактор, гладкая поверхность, явление, дифференциальное уравнение, система уравнений, реализация

In preceding papers implementations of strange attractors were too complicated. In this paper such phenomenon is presented as rolling of a ball along a smooth surface with three juts by gravity effect. The motion of the ball proves to be unpredictable. A corresponding system of differential equations is constructed and solved approximately on a computer. Also such surface is made of iron and tested.

Keywords: attractor, smooth surface, phenomenon, differential equation, system of equations, implementation

1. Введение. Известно понятие странного аттрактора - притягивающее множество неустойчивых траекторий в фазовом пространстве диссипативной динамической системы. Ранее в опубликованных работах (см. например [1], [2], [3]) предлагались сложные технические устройства для его реализации.

На основе методики [4], с использованием опыта составления систем дифференциальных уравнений, моделирующих физические процессы [5]-[12], нами здесь такое явление продемонстрировано через скатывание шарика по гладкой поверхности с тремя выступами под воздействием силы тяжести. Движение шарика оказывается непредсказуемым. Соответствующая система дифференциальных уравнений составлена и приближенно решена на компьютере. Также, такая поверхность изготовлена из железа и испытана.

2. Составление системы уравнений. Движение точки под действием силы, зависящей только от положения точки, по второму закону Ньютона выражается векторным уравнением

$$w''(t) = F(w(t)), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$w(0)=w_0, \quad w'(0)=v_0. \quad (2)$$

Выбирая малый шаг $h>0$, получаем расчетные формулы

$$v_1:=v_0+hF(w_0), \quad w_1:=w_0+h(v_0+v_1)/2. \quad (3)$$

Более точные расчетные формулы: (3) рассматривается, как предварительный результат, а потом вычисляется

$$v_I := v_0 + h(F(w_0) + F(w_I))/2, \quad w_I := w_0 + h(v_0 + v_I)/2. \quad (4)$$

Если точка движется по гладкой поверхности над горизонтальной плоскостью, высота которой выражается формулой

$$z = Z(x, y), \quad (5)$$

то получаем: вектор антиградиента

$$A(x, y) = -\{Z_x'(x, y), Z_y'(x, y), (Z_x'(x, y))^2 + (Z_y'(x, y))^2\}.$$

Разлагаем постоянный вектор гравитации $g = \{0, 0, -1\}$ на касательный T и нормальный Q к поверхности.

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{\langle A, g \rangle}{\langle A, A \rangle} A = \frac{(Z_x'(x, y))^2 + (Z_y'(x, y))^2}{(Z_x'(x, y))^2 + (Z_y'(x, y))^2 + ((Z_x'(x, y))^2 + (Z_y'(x, y))^2)} A(x, y) = \\ &= -\frac{1}{(Z_x'(x, y))^2 + (Z_y'(x, y))^2 + 1} \left\{ -Z_x'(x, y), -Z_y'(x, y), (Z_x'(x, y))^2 + (Z_y'(x, y))^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Сила, действующая на точку, пропорциональна вектору $T(x, y)$.

Достаточно рассматривать ее компоненты, действующие по осям Ox и Oy , потому что из новых значений $X(t)$ и $Y(t)$ значение высоты получается из (4).

Была взята поверхность, задаваемая формулой

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= \sum_{j=1}^3 \left(\left(x - \cos\left(\frac{2\pi}{3}j - \frac{\pi}{3}\right) \right)^2 + \left(y - \sin\left(\frac{2\pi}{3}j - \frac{\pi}{3}\right) \right)^2 + 0.01 \right)^{-1} + \\ &+ x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (1) с учетом (5) принимает вид

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{Z_x'(x(t), y(t))}{(Z_x'(x(t), y(t)))^2 + (Z_y'(x(t), y(t)))^2 + 1}, \\ y''(t) &= \frac{Z_y'(x(t), y(t))}{(Z_x'(x(t), y(t)))^2 + (Z_y'(x(t), y(t)))^2 + 1}. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Расчетная программа и результаты экспериментов. Для

приближенного решения системы (7)-(8) по формулам (3)-(4) была составлена следующая программа на языке pascal

```
PROGRAM sab_att;
USES CRT, graph;
var x,y,xn,yn,vx,vy,vxn,vyn,dx,dy,dxy2,ht,z,ffx,ffy: double;
var xn1,yn1,vxn1,vyn1,ffx1,ffy1: double;
I,j,nxy,it,nt,np,ihand,n_time,ik: longint;
vardrv, mode,f,n,xg,yg,zg: integer;
xf,yf:array[1..3] of double;
xfg,yfg:array[1..3] of integer;
procedure grad(varfx,fy,xx,yy:double);
varfxx, fyy, fxy, a: double;
begin fxx:=0.; fyy:=0.; a:=1.0;
for j:=1 to 3 do begin
dxy2:=sqr(xx-xf[j])+sqr(yy-yf[j])+0.01;
fxx:=fxx+2.0*(xx-xf[j])/sqr(dxy2);
fyy:=fyy+2.0*(yy-yf[j])/sqr(dxy2) end;
fxx:=fxx-2.0*a*xx; fyy:=fyy-2.0*a*yy;
fxy:=sqr(fxx)+sqr(fyy)+1.0;
fxx:=fxx/fxy; fyy:=fyy/fxy;
fx:=fxx; fy:=fyy; end;
begin {main}
drv:=0; mode:=VgaHi; InitGraph(drv,mode,'c:\tp\bgi');
randomize;
SetTextStyle(0,0,2);
OutTextXY(30,20,'Pankov, Tagaeva, 2018. Strange attractor');
z:=300.; zg:=round(z)+30;
xf[1]:=-1.0; yf[1]:=0.0; xf[2]:=1.0/2.0; yf[2]:=sqrt(3.0)/2.0;
xf[3]:=1.0/2.0; yf[3]:=-sqrt(3.0)/2.0;
```

```

for j:=1 to 3 do begin xfg[j]:=round(z*xf[j]); yfg[j]:=round(z*yf[j]);
Setcolor(green); circle(xfg[j]+zg,yfg[j]+zg,8); end;
x:=0.3; y:=0.1; vx:=0.; vy:=0.; ht:=0.1; nt:=400;
for it:=0 to nt do
begin {it} grad(ffx,ffx,x,y);
vxn1:=vx+ffx*ht; vyn1:=vy+ffx*ht;
xn1:=x+(vx+vxn1)*ht/2.0; yn1:=y+(vy+vyn1)*ht/2.0;
grad(ffx1,ffx1,xn1,yn1);
vxn:=vx+(ffx+ffx1)*ht/2.0; vyn:=vy+(ffx+ffx1)*ht/2.0;
xn:=x+(vx+vxn)*ht/2.0; yn:=y+(vy+vyn)*ht/2.0;
xg:=round(z*xn); yg:=round(z*yn);
Setcolor(white); circle(xg+zg,yg+zg,2+(it div 100)); delay(50);
x:=xn; y:=yn; vx:=vxn; vy:=vyn; end {it}; END.

```

Все результаты численных экспериментов с различными начальными условиями дали хаотическое движение в ограниченной области.

4. Изготовление модели и ее испытание.

1) Вырезать из тонкого железного листа правильный шестиугольник диаметром 60 см. Занумеруем его вершины 1-2-3-4-5-6, а центр - 0.

2) Расположить шестиугольник горизонтально и согнуть его так, чтобы отрезки 1-0, 3-0, 5-0 имели большой наклон вниз к точке 0, а отрезки 2-0, 4-0, 6-0 имели небольшой наклон вниз к точке 0.

3) Пустить стальной шарик из точки 2. Он должен покатиться к точке 0, потом подняться немного по направлению к точке 5, потом скатиться (неопределенно) на отрезок 6-0 или на отрезок 4-0, по этому отрезку скатиться к точке 0, подняться и т.д.

Авторы благодарят мастера Нуралы Ниязбекова за изготовление модели.

Список использованных источников

1. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. - Москва: Наука, 1984. - 432 с.

2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. - пер. с англ. - Москва: Мир, 1985. - 529 с.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. -Москва: Мир, 1988. - 240 с.
4. Kenenbaeva G.M., Tagaeva S. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014). – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 107-111.
5. Pankov P., Tagaeva S. Mathematical modeling of distribution of discrete electrical charges // Abstracts of the V International Scientific Conference “Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics” devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek, 2016. – P. 58.
6. Тагаева С.Б. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, описывающих отталкивание частиц // Вестник Жалал-Абадского государственного университета, 2016, № 1(32). – С.78-82.
7. Тагаева С.Б. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, описывающих отталкивание частиц с различными зарядами // Естественные и математические науки в современном мире / Сб. статей по материалам XLIX междунар. научно-практ. конф. № 12 (47). Новосибирск: Изд. АНС «СибАК», 2016.– С. 85-91.
8. Тагаева С.Б. Система обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, описывающих отталкивание частиц на окружности // Естественные и математические науки в современном мире / Сб. статей по материалам XLIX междунар. научно-практ. конф. № 12 (47). Новосибирск: Изд. АНС «СибАК», 2016.– С. 91-95.
9. Панков П.С., Тагаева С.Б. Условия гладкости решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Доклады НАН КР, 2016, № 2. - С. 26-30.

10. Tagaeva S.B. Existence and stabilization of solution of system of differential equations describing arrangement of many discrete electrical charges on a segment // Интернет-журнал ВАК КР, 2017, № 1. - 6 с.

11. Tagaeva S. Example of trifurcation of distribution of repelling electrical charges // Abstracts of the Third International Scientific Conference "Actual problems of the theory of control, topology and operator equations" / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2017. – P. 89.

12. Тагаева С.Б. Экспериментальное исследование распределения электрических зарядов в ограниченных областях // Тезисы докладов II Борубаевских чтений (г. Бишкек, 1 марта 2018 года). - Бишкек: Кыргызское математическое общество, 2018.- С. 32.

MSC 49J15

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ В МОДЕЛИ ВОЗРАСТАНИЯ ЭНТРОПИИ В ПОЧТИ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМАХ С ТРЕНИЕМ

Панков П.С., Акерова Дж.А.

Институт математики НАН КР

Термодинамиканын экинчи законун тактыктоонун негизинде буга чейин авторлор таасир этилүүчү системада материалдык чекитти кандайдыр бир аралыкка жылдырууда убакыттан көз каранды болгон энтропиянын өсүүсүнүн төмөнкү баасын сүрүлүүнү эске албай алышкан. Бул макалада сүрүлүүнү эске албай тез жылдырууну так баалоо жана компьютердин жардамы менен сүрүлүүнү эске алган тез жылдырууну баалоо алынган.

Урунттуу сөздөр: энтропия, башкаруу, дифференциалдык тендеме, таасир этилүүчү система, сүрүлүү

Как уточнение второго закона термодинамики, ранее авторами были получены оценки снизу для возрастания энтропии при передвижении материальной точки без трения на определенное расстояние в зависимости от времени в permanently неустойчивых системах. В данной статье получена точная оценка для передвижения без трения и с помощью компьютера получены оценки для передвижения с учетом трения.

Ключевые слова: энтропия, управление, дифференциальное уравнение, permanently неустойчивая система, трение

As a specification of the second law of thermodynamic, earlier the authors derived estimations from below on increasing of entropy while motion of a material point over definite distance on depending on time in permanently unstable systems. The exact estimation for motion without friction and estimations for motion with friction by means of computer are obtained in this paper.

Keywords: entropy, control, differential equation, permanently unstable system, friction

Введение. Известно, что согласно второму закону термодинамики в замкнутых системах энтропия может только возрастать. Ранее нами были выдвинуты гипотезы о том, что при некоторых условиях возможны оценки снизу для количества увеличения энтропии.

Ранее авторами были получены оценки снизу для возрастания энтропии при передвижении материальной точки без трения на определенное расстояние в зависимости от времени в перманентно неустойчивых системах. В данной статье получена точная оценка для передвижения без трения и с помощью компьютера получены оценки для передвижения с учетом трения.

В первом разделе статьи введены необходимые определения и приведены гипотезы.

Во втором разделе поставлена краевая задача для дифференциального уравнения, описывающего движение точки в рамках теории оптимального управления.

В третьем разделе доказана точная оценка для решения этой задачи для передвижения без трения. В четвертом разделе с помощью компьютера получены оценки для передвижения с учетом трения.

1. Определения и гипотезы. Среди различных определений отметим

Определение 1 (см. например [1]). **Энтропия** H - это функция состояния **термодинамической системы**, определяющая меру необратимого рассеивания энергии, ее изменение (в тех видах процессов, которые мы будем рассматривать) определяется по формуле $\Delta H = \sum \frac{\Delta Q}{\Theta}$, где ΔQ - количества переданной тепловой энергии или энергии, необратимо перешедшей в тепловую, Θ - абсолютные температуры.

Общепринятая

Гипотеза 1 (второй закон термодинамики). В замкнутых системах (в которых нет обмена энергией с окружающей средой) изменение ΔH энтропии может быть только положительным (приращение энтропии).

На основании [2], где найдена нижняя оценка увеличения энтропии при обработке одного бита информации $\Delta H \geq k_b \Theta \ln 2 (k_b - \text{постоянная Больцмана})$, и замечания [3]: «чем быстрее пловец проплывет определенную дистанцию, тем больше энергии он затратит» в [4] нами выдвинуты следующие гипотезы.

Пусть имеется физическая замкнутая система, в данный момент она находится в стационарном состоянии A и есть возможность перехода в другое стационарное состояние B .

Гипотеза 2. Существует такой отрезок времени T_0 (адиабатическое время системы), зависящий только от начального состояния системы, что для любого $T < T_0$ приращение энтропии ΔH в системе не меньше некоторой положительной величины при любом переходе от состояния A к состоянию B за время T . Существует также такая константа C_0 , что

$$\Delta H \geq \frac{C_0}{T^2} \quad ([C_0] = [m][L]^2[\Theta]^{-1})$$

где $[\cdot]$ - размерность физической величины, m - масса, L - длина.

Если исходить из принципа детерминизма, то в замкнутой системе есть только один сценарий будущего, то есть не могут существовать различные возможности переходов. Поэтому будем предполагать, что различные возможные действия внутри системы, переводящие ее из состояния A в состояние B , задаются некоторым внешним воздействием (управлением) достаточно малой энергии. Такую систему мы называли "таасир этилүүчү" [5].

Приведем более конкретную формулировку гипотезы.

Пусть в некоторой инерциальной системе координат в момент времени t_1 в этой системе некоторая материальная точка массы m неподвижна и в момент времени $t_2 = t_1 + T$ она также неподвижна и находится на расстоянии X от начального положения.

Гипотеза 3. Существуют такие отрезок времени T_0 (адиабатическое время системы), и такая константа G_0 , зависящие только от начального

состояния системы, что для любого $T < T_0$ приращение энтропии ΔH в системе не меньше $\Delta H \geq \frac{G_0 m X^2}{T^2} ([G_0] = [\Theta]^{-1})$.

В данной статье эта гипотеза подтверждается для одного из видов движений. Получена оценка для коэффициента.

2. Постановка задачи для движения без трения. Предположим, что имеются неограниченные возможности как ускорения, так и торможения точки, и при торможении вся энергия переходит в тепло при постоянной температуре (теплоемкость среды достаточно велика).

Тогда при $t_1 = 0$ получаем следующую задачу оптимального управления:

$$x''(t) = \frac{u(t)}{m} \quad (0 \leq t \leq T), \quad x(0) = x'(0) = 0; \quad x(T) = X, x'(T) = 0. \quad (1)$$

Здесь управляющее воздействие (кусочно-непрерывная функция) $u(t)$ – сила $[u(t)] = [m][L]^2[T]^{-2}$.

Требуется минимизировать функционал, показывающий количество энергии, перешедшей в тепло, то есть выделившейся при торможении ($u(t) < 0$).

Используем формулу для работы $A = S \cdot F$, для мощности:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{|dS| \cdot |F|}{dt} = |V| \cdot |F|,$$

где A – работа, F – сила, S – путь, V – скорость,

и другую формулу для работы: $A = \int \left(\frac{dA}{dt} \right) dt = \int P dt$.

Очевидно, что сначала должно быть ускорение, потом – замедление точки. Тогда скорость будет всегда неотрицательна, и получаем задачу минимизации функционала (работа при торможении):

$$I[u(\cdot)] = A = \int_0^T P dt = \int_0^T V F dt = \int_0^T x'(t) \max(0, -u(t)) dt. \quad (2)$$

Из (1) находим

$$x'(t) = \int_0^t \frac{u(s) ds}{m}, \quad x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)u(s) ds}{m},$$

$$I[u(\cdot)] = \int_0^T \int_0^s u(\sigma) d\sigma \frac{\max(0, -u(s)) ds}{m}. \quad (3)$$

Таким образом, вместо (1) возникают два условия:

$$\int_0^T u(s) ds = 0, \quad \int_0^T (T-s)u(s)ds = mX. \quad (4)$$

Заменим $s = TS, U(S)mX/T^2 = u(TS)$ ($0 \leq S \leq 1$). Тогда эти условия принимают вид:

$$\int_0^1 U(S) dS = 0, \quad (5)$$

$$\int_0^1 (1-S)U(S) dS = 1, \int_0^1 SU(S) dS = -1, \quad (6)$$

$$I[u(\cdot)] = mX^2/T^2 J[U(\cdot)]; \quad J[U(\cdot)] = \int_0^1 \int_0^1 U(\sigma) d\sigma \max(0, -U(S)) dS. \quad (7)$$

Обозначим C_0 – минимально возможное значение функционала $J[U(\cdot)]$ при условиях (5)-(6). Тогда из (7) получаем

$$I[u(\cdot)] \geq C_0 \frac{mX^2}{T^2}. \quad (8)$$

(Вследствие упрощенной постановки задачи – отсутствие трения при ускорении – адиабатическое время не ограничено).

Найдем точное значение абсолютной константы C_0 .

3. Доказательство основного результата для движения без трения.

Теорема 1. Константа $C_0 = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Очевидно, что для получения наилучшего результата должна существовать такая точка $w \in (0,1)$, что

$$U(S) \equiv U_+(S) > 0, \quad S \in [0, w); \quad U(S) \equiv -U_-(S) < 0, \quad S \in (w, 1]$$

(сначала – ускорение, потом – торможение).

Тогда функционал (7) принимает вид

$$J[U(\cdot)] = \int_w^1 \int_0^s U_-(\sigma) d\sigma U_-(S) dS.$$

Обозначим $V(U(\cdot); S) = \int_S^1 U_-(\sigma) d\sigma$ ($w \leq S \leq 1$), тогда получаем

$$\begin{aligned} J[U(\cdot)] &= - \int_w^1 (U(\cdot); S) V'(U(\cdot); S) dS = - \frac{1}{2} (V^2(U(\cdot); 1) - V^2(U(\cdot); w)) = \\ &= \frac{1}{2} V^2(U(\cdot); w). \end{aligned} \quad (9)$$

Чтобы найти оценку снизу для этого выражения, перепишем (6) в виде

$$-\int_w^1 SU_-(S) dS = -1.$$

Из него находим

$$V(U(\cdot); w) = \int_w^1 U_-(\sigma) d\sigma > \int_w^1 SU_-(S) dS = 1 + \int_0^w SU_+(S) dS > 1. \quad (10)$$

Отсюда $C_0 = \frac{1}{2}$.

Покажем, что эта оценка - неулущаемая. Рассмотрим функцию

$$U_q(S) = (q+2)2^{q+1}\left(\frac{1}{2}-S\right)^q,$$

где q - нечетное натуральное число.

Очевидно, что (5) выполняется в силу симметрии. Проверим выполнение

(6). Заменяя $\sigma = \frac{1}{2}-S, -\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-S)U_q(S) dS &= (q+2)^{2q+1} \int_{-1/2}^{1/2} (1/2 + \sigma)\sigma^q d\sigma = \\ &= (q+2)^{2q+1} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma^{q+1} d\sigma = 2^{q+1}((1/2)^{q+2} - (-1/2)^{q+2}) = 1. \end{aligned}$$

С этой же заменой вычислим (9):

$$\begin{aligned} J[U_q(\cdot)] &= 1/2 V^2(U_q(\cdot); w) = 1/2 \left(-\int_{1/2}^1 U_q(S) dS\right)^2 = \\ &= 1/2 \left(\int_0^{1/2} (q+2)2^{q+1} \sigma^q d\sigma\right)^2 = 1/2 ((q+2)/(q+1))^2 \end{aligned}$$

Устремляя $q \rightarrow \infty$, получаем, что $J[U_q(\cdot)] \rightarrow 1/2$. Отсюда и из (10) следует заключение теоремы.

II Доказательство. Вся кинетическая энергия, имеющаяся у точки в момент переключения на торможение, должна перейти в тепло.

Отсюда получаем функционал для минимизации

$$1/2 m(x'(w))^2 \sim J_1[U(\cdot)] = 1/2 \left(\int_0^w U_+(\sigma) d\sigma\right)^2. \quad (11)$$

Чтобы найти оценку снизу для этого выражения, перепишем (6) в виде

$$\int_0^w (1-\sigma)U_+(\sigma) d\sigma - \int_w^1 (1-\sigma)U_-(\sigma) d\sigma = 1,$$

$$\int_0^w U_+(\sigma) d\sigma = \int_0^w \sigma U_+(\sigma) d\sigma + 1 + \int_w^1 (1-\sigma) U_-(\sigma) d\sigma.$$

Отсюда $\int_0^w U_+(\sigma) d\sigma > 1$, $J_1[U(\cdot)] > 1/2$.

4. Постановка задачи для движения с трением. Предположим, что существует трение и оно постоянно, сила трения равна k . Тогда для движения в одну сторону, как выше, получаем уравнение

$$x''(t) = u(t)/m - k/m \quad (0 \leq t \leq T). \quad (12)$$

Еще: должно быть $u_+(t) > k$ (иначе точка не будет двигаться). Здесь возможно также $u_-(t) \equiv 0$ (точка остановится вследствие трения).

Заменим еще $KmX/T^2 = k$. Тогда вместо условий (5) и (6) получаем:

$$\int_0^1 (U(S) - K) dS = 0, \quad (13)$$

$$\int_0^1 (1-S)(U(S) - K) dS = 1. \quad (14)$$

Функционал для минимизации, вместо (11): работа силы трения до значения w и кинетическая энергия при w , которая вся должна истратиться:

$$J_2[U(\cdot)] = Kw + 1/2 \left(\int_0^w (U_+(\sigma) - K) d\sigma \right)^2.$$

При этом должно быть $J_2[U(\cdot)] \geq K(1-w)$ (иначе точка не дойдет до конца отрезка).

Из (14) получаем:

$$\int_0^w (1-S)(U_+(S) - K) dS - \int_w^1 (1-S)(U_-(S) + K) dS = 1,$$

$$\int_0^w (U_+(S) - K) dS = 1 + \int_0^w S(U_+(S) - K) dS + \int_w^1 (1-S)(U_-(S) + K) dS,$$

$$\int_0^w (U_+(S) - K) dS \geq 1 + \int_w^1 (1-S)K dS = 1 + 1/2 K(1-w)^2.$$

Отсюда $J^2[U(\cdot)] \geq F(K, w) := Kw + 1/2(1 + 1/2 K(1-w)^2)^2$.

Поскольку эта функция слишком сложная для получения конкретных оценок аналитическим способом, были применены приближенные вычисления. Они дали следующие результаты для нижней оценки L функционала (результат при $K = 0$ совпадает с Теоремой 1).

0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.500	0.550	0.603	0.658	0.714	0.771

Список использованных источников

1. Мартин Н. Ингленд Дж. Математическая теория энтропии. – Москва: Мир, 1988. – 350 с.
2. Landauer R. Irreversibility and heat generation in the computing process // IBM Journal of Research and Development, vol. 5, 1961, pp. 183-191.
3. Landauer R., Bennett C. H. The Fundamental Physical Limits of Computation // Scientific American, July, 1985, pp. 48-56.
4. Панков П.С. Адиабатические показатели замкнутых систем // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. Серия 3. Естественно-технические науки. Физика и физическое образование, 2003. – С. 146-147.
5. Панков П., Баячорова Б., Жураев М. Кыргызтилин компьютерде чагылдыруу. – Бишкек: Турап, 2010. – 172 б.
6. Pankov P., Akerova Dzh. Minimization in mathematical model of increment entropy in almost closed systems // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Ed. Acad. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – P. 252.
7. Кененбаева Г.М., Акерова Дж.А., Кененбаев Э. Математические модели для оценки приращения энтропии // Тезисы докладов II Борубаевских чтений (г. Бишкек, 1 марта 2018 года). - Бишкек: Кыргызское математическое общество, 2018. - С. 26.

MSC 97U40

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ НОВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ ПРИ ПОМОЩИ СЛУЧАЙНОГО ФОРМИРОВАНИЯ ЗАДАНИЙ

Панков П.С., Джаналиева Ж.Р.

Институт математики НАН КР, Международный университет Кыргызстана

Авторлордун пикири боюнча, кээ бир математикалык түшүнүктөр үйрөтүүгө кереги жок. Дал келген усулдук менен түзүлгөн суроолордон жана тапшырмалардардан окуучу

жана студент өзү кээ бир математикалык түшүнүктөргө ээ боло алат. Сократ бул ойго ээ. Суроолорду жана тапшырмаларды кокустан түзүүчүн түзүүчүлүк жана сейректик принциптери жана “жалпыланган маселе” аныктамасы сунуш кылынат.

Урунттуу сөздөр: математикалык түшүнүк, жалпыланган маселе, түзүүчүлүк, сейректик.

По мнению авторов, не обязательно преподавать некоторые математические понятия. По составленным по соответствующей методике вопросам и заданиям учащиеся и студенты могут сами овладеть некоторыми математическими понятиями. Эта мысль принадлежит Сократу. Для случайного составления вопросов и заданий предлагаются принципы формируемости и уникальности и понятие обобщенной задачи.

Ключевые слова: математическое понятие, обобщенная задача, формируемость, уникальность.

In the authors' opinion, some mathematical notions are not necessary to be taught. By composed due to corresponding methodic questions and tasks, pupils and students themselves can discover some mathematical notions. This thought belongs to Socrates. For random composing of questions and tasks principles of generativity and uniqueness and general definition of “parameterized task” are proposed.

Key words: mathematical notion, parameterized task, generativity, uniqueness.

Введение. На основе [1] нами выдвинута [6]

Гипотеза. Используя специально подобранные задания и предлагая учащемуся выполнить соответствующие построения, измерения и эксперименты, можно подвести учащегося (или, более эффективно, группу учащихся) к самостоятельному открытию некоторых понятий элементарной математики и высшей математики.

В статье, на основе опыта преподавания предложений студентов, описаны различные способы введения понятий.

1. Обзор публикаций по случайному формированию заданий.

Вследствие недостатков методики формализованных тестов множественного выбора (другое название - тесты с закрытыми ответами) в 1980-е годы начала развиваться методика программирования на компьютере «случайного формирования заданий», «параметризованных вопросов» для отдельных дисциплин. В 1990-е годы такой способ был обобщен в некоторых публикациях, например [2].

Нами был разработан следующий комплекс требований к компьютерному контролю знаний, для обеспечения требований объективности, валидности и надежности:

- Формируемость - түзүүчүлдүк - generativity: задание в полном виде не существует до включения компьютера);
- Уникальность - сейректик - uniqueness: все участники получают разные задания;
- (для официального экзамена или соревнования): до оценки компьютером ответа участника, никто (в том числе и составители задач, и организаторы) не знает правильных ответов на предложенные задания;
- Представительность: компьютерная тестирующая программа должна быть формой не только контроля, но и представления знаний;
- Конкретность: ответ должен быть в виде числа (точного или приближенного), слова, действия, с однозначно определенным результатом.
- Допускаются также приближенные ответы, либо вычисленные с заданной точностью, либо найденные по способу «интеллектуального глазомера», с соответствующим оцениванием.

Для реализации этих требований были предложены определения:

"Обобщенная задача" (в английском языке соответствует термин *parameterized task*)— это алгоритм для получения нескольких (многих) однотипных задач с выбором параметров; исходными данными для алгоритма являются случайные числа, выбираемые в некоторых диапазонах. "Настраиваемая обобщенная задача" - исходными данными для алгоритма являются диапазоны, выбираемые (преподавателем) в рамках некоторых базовых диапазонов, и случайные исходные данные, выбираемые в выбранных диапазонах.

В этих определениях, не умаляя общности, можно считать, что данные диапазоны являются диапазонами целых чисел. По целым числам, используя математические операции и понятие массива, можно также получить исходные данные в виде дробных чисел, векторов, матриц, многочленов для математики (обобщенная задача первого уровня), а также варьировать логические условия задач с сохранением степени сложности (обобщенная задача второго уровня).

2. Способы введения новых понятий.

2.1. Понятие, возникающее при решении незнакомой задачи «традиционного» типа.

Пример 1. Найти область (или кривую, ограничивающую область), удовлетворяющую одному из свойств кривых второго порядка. После того, как студент найдет формулу (что мало вероятно) или сделает рисунок, спросить: а какие свойства имеет эта область (кривая) - симметрия, неограниченность и т. д.? Встречал ли он раньше такое? Как оно называлось?

Пример 2.

1) Начертите на клетчатой бумаге вектор, координаты которого – целые, не равные между собой и отличные от нуля числа.

2) Начертите также вектор, координаты которого – целые числа, параллельный и не равный по длине первому вектору.

3) Из четырех чисел – координат первого и второго векторов – составьте выражение, равное нулю.

4) Вместо координат первого вектора поставьте буквы x_1, y_1 , вместо координат второго – буквы x_2, y_2 .

5) Уберите « $=0$ » и вы получите выражение из букв x_1, y_1, x_2, y_2 .

6) Вычислите значение этого выражения для различных пар параллельных и непараллельных векторов.

7) Сделайте вывод. Это называется «формула определителя второго порядка».

Пример 3.

1) Начертите на клетчатой бумаге вектор, координаты которого – целые, не равные между собой и отличные от нуля числа.

2) Начертите также вектор, координаты которого – целые числа, перпендикулярный и не равный по длине первому вектору.

3) Из четырех чисел – координат первого и второго векторов – составьте выражение, равное нулю.

4) Вместо координат первого вектора поставьте буквы x_1, y_1 , вместо координат второго – буквы x_2, y_2 .

5) Уберите « $=0$ » и вы получите выражение из букв x_1, y_1, x_2, y_2 .

6) Вычислите значение этого выражения для различных пар перпендикулярных и неперпендикулярных векторов.

7) Сделайте вывод. Это называется «скалярное произведение двух векторов на плоскости».

2.2. Одним из способов формирования новых понятий в математике - является использование фактор-множества.

Пример 4. «Найдите общее между рисунками» или «Соберите похожие между собой карточки» (буквы не пишутся)

A ** B ///// C ***** D // E))))))) F *** G))))

Сразу же видно сходство между рисунками A , C и F ; B и D ; E и G . Здесь нужно спросить «А какое еще другое можно найти сходство?» Идея фактор-множества по тому отношению, в котором находятся между собой рисунки B и C , C и E , B и E , A и D , дает понятие натурального числа.

2.3. Известное задание: «найти закономерность и продолжить последовательность». Мы даем творческое задание «придумать интересную последовательность».

Пример 5. Квадратическая последовательность.

Обычно 1-2 студента из группы придумывают последовательность вида:

2, 5, 11, 20, 32, 37, ...

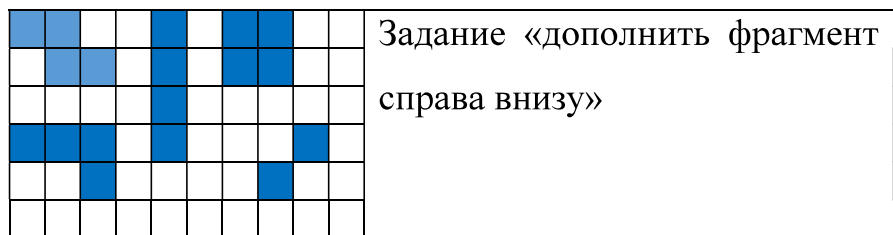
После этого ее можно предлагать другим студентам для продолжения, и большинство справляются с этой задачей.

Следующие вопросы: Как описать математически все такие последовательности? Каким алгоритмом вы решили задачу продолжения последовательности? - вызывают большие затруднения даже у сильных студентов, то есть они не могут объяснить свои действия.

Приходится двигаться поэтапно: «Вычислите разности и припишите их внизу». «Что образуют разности?» и т.д.

2.4. Нарисовать рисунок, аналогичный имеющимся, по заданным элементам (дополнить рисунок).

Пример 6. Понятие площади (но говорить это слово ученикам нельзя).



Большинство учеников выполняют задание правильно, но непонятно, что они думают: «идея площади» или «количество клеток». Поэтому нужно давать более сложное задание, с одной или тремя половинами клеток у разных фигур, по формуле $4 + \frac{1}{2} = 3 + 3 \cdot \frac{1}{2}$ (с пятью половинами клеток большинство учеников уже «потеряют нить»). А после этого спросить: «Что общего у всех этих фигур?». «Как это называется?»

Примечание. Таким способом определить понятие «длина» не удастся, потому что при проведении ломаной по границам клеток возникает понятие «количество звеньев», а при проведении также по диагоналям возникает проблема, поскольку многие уверены, что диагональ малого квадрата равна стороне.

Такое явление мы называем «антизнание», см. [8]. Аналогичный список имеется в компьютерной гимназии № 5 г. Бишкек. Когда ум ученика работает на пределе, то (не отдельно, а внутри большой задачи) используются «равенства» вида $a^b = ab, (a+b)^2 = a^2 + b^2$. Также ученику трудно разделить понятия «периметр» и «площадь», потому что для выпуклых фигур между числовыми значениями периметра и площади имеется сильная корреляция (замечание М.Джураева).

2.5. Завершить пару рисунков по аналогии с имеющимися парами

Пример 7. Преобразование подобия

К	к	М	м	V	S	s	T	т
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Как и выше, нельзя говорить слово «подобие», а нужно спросить у учеников, как назвать такое свойство. Многие скажут «похожесть». Тогда надо

показать пример: KK - они «похожи», но явно не соответствуют примерам в таблице.

Далее, можно показать таблицу

KK	MM	VV	SS	TT
------	------	------	------	------

и сказать: все пары «подобны», как это называется в математике, но чем они отличаются? Так подвести учеников к понятию «коэффициент подобия».

3. Заключение. Авторы выражают благодарность преподавателям, которые использовали элементы предложенной нами методики и давали советы по ее совершенствованию, и студентам, которые придумывали новые задания и решали их.

Список использованных источников

1. Сократ. Диалог «Менон».
2. Панков П.С., Джаналиева Ж.Р. Опыт и перспективы использования комплекса UNIQTEST уникальных тестовых заданий в учебном процессе // Образование и наука в новом геополитическом пространстве: Тез.докл. научно-практической конференции. – Бишкек: МУК, 1995. - С. 217.
3. Панков П.С., Джаналиева Ж.Р. Проектирование и развитие программных экзаменационных комплексов по математике и физике // Образование в XXI веке: ценности и перспективы: Материалы Междун. научно-практ.конф. Часть 2. - Бишкек: КАО, 2001. - С. 281-284.
4. Панков П.С., Копеев Ж.Б., Кусманов К. Разработка концепции компьютерного комплексного экзамена и его содержание для информатики и математики // Вестник МУК, 2012, № 1 (21) - С.15-19.
5. Панков П.С., Джаналиева Ж.Р. Экзаменующая программа со случайным выбором заданий извне // Вестник ОшГУ. Серия физико-матем. наук. – 2003. - № 7. – С. 174-177.
6. Панков П., Джаналиева Ж., Найманова А. Индуктивное и экспериментальное изучение математических дисциплин (Математические факты и понятия,

которые могут быть обнаружены самостоятельно). – Saarbrücken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2015. – 70 с.

7. Кусманов К.Р., Копеев Ж.Б., Назарбаев Ф.Т. Опыт использования комплексных компьютерных экзаменов по математике и информатике // Материалы Международной научной конференции молодых ученых, магистрантов, студентов и школьников «XV Сатпаевские чтения», том 19. – Павлодар, 2015. – С. 283-290.

8. Борубаев А.А., Панков П.С. Дискретная математика (допущено МОН КР в качестве учебного пособия для преподавателей высших учебных заведений). - Бишкек: изд. КРСУ, 2010. – 123 с.

MSC 49M37

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕРА ПОСЕВНОЙ ПЛОЩАДИ ПОД СЕЛЬХОЗ КУЛЬТУРЫ ХОЗЯЙСТВА

Асанкулова М., Суйналиева Н.К., Маатов К.

Институт математики НАН КР

Алынуучу кирешени максималдаштыруу критериясы менен чарбанын эгин аянттарынын ар бир тилкесине эгилүүчү айыл чарба өсүмдүктөрдүн айдоо аянтын аныктоо маселесине математикалык модель тургузулган.

Урунттуу сөздөр. Математикалык модель, айдоо аянты, чарба, киреше, чыгым.

В работе сформулирована математическая модель задачи определения размера посевной площади под каждой вид культуры на каждом участке хозяйства по критерию максимума получаемого дохода. Работоспособность модели проверена с тестовым примером.

Ключевые слова: математическая модель, посевная площадь, хозяйство, доход, прибыль.

The paper presents a mathematical model of the problem of determining the size of the acreage for each type of crop in each sector of the economy on the criterion of maximum income. The operability of the model is checked with a test example.

Keywords: mathematical model, acreage, economy, income, types of culture, profit.

Определение и прогнозирование урожайности сельскохозяйственных культур является одним из приоритетных задач аграрного сектора экономики Кыргызской Республики, так как она играет важнейшую роль в социально-экономическом развитии государства. Поэтому, в республике в начале XXI века разработаны разные долгосрочные и краткосрочные стратегии развития

экономики, которые будут определять социально-экономическую политику государства на планируемые периоды.

Применение экономико-математических методов, моделей и современных компьютерных технологий в планировании и управлении производством позволяет вскрыть неиспользованные возможности сельскохозяйственного производства.

Сформулируем экономико-математическую модель задачи определения оптимального размера посевных площадей под сельскохозяйственные культуры крестьянского хозяйства.

Технико-экономическая постановка задачи. Пусть в крестьянском хозяйстве имеется m участков с разной плодородностью почвы, где выращивается n вида сельскохозяйственной культуры. Предполагаются известными площадь каждого участка крестьянского хозяйства, минимально допустимый и максимально возможный размер посевной площади под каждый вид культуры, урожайность, расходы на выращивание в единице размера посевной площади и оптовая реализационная цена сельскохозяйственной продукции.

Требуется определить размер посевной площади под каждый вид культуры так, чтобы получаемая суммарная прибыль крестьянского хозяйства была максимальной.

Сформулируем математическую модель задачи.

Введем следующие обозначения:

i – индекс участка крестьянского хозяйства,

j – индекс вида сельскохозяйственной культуры.

Известные константы:

a_{ij} – урожайность j -го вида культуры в единице площади i -го участка, $\overline{c_{ij}}$ – затраты на выращивание j -го вида культуры на единице площади i -го участка, c_j – оптовая цена реализации единицы объема сельскохозяйственной продукции j -ой культуры, $c_{ij} = a_{ij}c_j - \overline{c_{ij}}$ – прибыль получаемая крестьянским

хозяйством от реализации продукции j -го вида культуры, выращенной на единице площади i -го участка, s_i – площадь i -го участка крестьянского хозяйства, b'_j, b''_j – заданные минимально допустимые и максимально возможные общие посевные площади под j -ую культуру.

Искомая переменная:

x_{ij} – размер посевной площади под j -ой культуру на i -ом участке.

Согласно принятым обозначениям, математическая модель задачи определение оптимального размера посевной площади под каждый вид культуры по критерию максимума прибыли имеет вид.

$$\text{Найти максимум } L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{при условиях } \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

$$b'_j \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b''_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Метод решения. Изложим метод решения экстремальной задачи (1) - (4). Задача (1) - (4) является линейной задачей с двухсторонними ограничениями на объем посевной площади j -ой культуры. Объем вычислительной работы резко сократится, если исключим из модели (1) - (4) неравенство (3), тем самым сведем ее к транспортной.

Для этой цели искомую $x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ рассмотрим как сумма слагаемых двух переменных $x_{ij} = z_{ij} + y_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, где z_{ij} – размер посевной площади под j -ый вид культуры на i -ом участке, сумма которых по всем $i, i = 1, 2, \dots, m$ должна быть равна размеру посевной площади $b'_j, j = 1, 2, \dots, n$, а y_{ij} – размер посевной площади под j -ый вид культуры на i -ом участке, сумма которых по всем $i = 1, 2, \dots, m$ больше чем b'_j .

Тогда задачу (1)-(4) можем записать в виде.

Найти минимум

$$L(z, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i j} (z_{i j} + y_{i j}) \quad (5)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n (z_{i j} + y_{i j}) = s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^m z_{i j} = b'_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^m y_{i j} \leq b''_j - b'_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

$$z_{i j} \geq 0, y_{i j} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где $z = \{z_{i j} : i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$,

$y = \{y_{i j} : i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$.

Предполагается, что выполняется условие

$$\sum_{i=1}^m s_i \leq \sum_{j=1}^n b''_j,$$

Преобразуем задачу (5)-(9).

Введем условный участок посевной площади под номером $m + 1$ с размером

$$s_{m+1} = \sum_{j=1}^n b''_j - \sum_{i=1}^m s_i .$$

При этом в отличие от обычного преобразования открытой транспортной задачи к закрытой, коэффициенты при переменных целевой функции $z_{m+1 j}$ полагаем равным $c_{m+1 j} = M$, а при переменных $y_{m+1 j}$ полагаем равным $c_{m+1 j} = 0$.

Условия задачи (5)-(9) после всех указанных преобразований можно записать в следующем виде:

Для каждой $j, j = 1, 2, \dots, n$ сумма переменных $x_{ij} = z_{ij} + y_{ij}$ определяет размер посевной площади j —го вида культуры на i —м участке крестьянского хозяйства.

	b'_1	$b''_1 - b'_1$	b'_2	$b''_2 - b'_2$	$\dots$	b'_n	$b''_n - b'_n$
s_1	c_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{12}		c_{1n}	c_{1n}
	z_{11}	y_{11}	z_{12}	y_{12}	$\dots$	z_{1n}	y_{1n}
s_2	c_{21}	c_{21}	c_{22}	c_{22}		c_{2n}	c_{2n}
	z_{21}	y_{21}	z_{22}	y_{22}	$\dots$	z_{2n}	y_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
s_m	c_{m1}	c_{m1}	c_{m2}	c_{m2}		c_{mn}	c_{mn}
	z_{m1}	y_{m1}	z_{m2}	y_{m2}	$\dots$	z_{mn}	y_{mn}
s_{m+1}	M	0	M	0		M	0
	z_{1m+1}	y_{m+1}	z_{m+2}	y_{m+2}	$\dots$	z_{m+n}	y_{m+n}

Приведем пример для проверки пригодности математической модели (1)-(4).

Пусть в крестьянском хозяйстве имеются три участка с различной плодородностью почвы, где выращиваются три вида сельскохозяйственных культур. Предполагается известной площадь каждого участка крестьянского хозяйства $s = (s_1, s_2, s_3) = (10, 25, 12)$; минимально допустимый $b' = (b'_1, b'_2, b'_3) = (10, 11, 12)$; и максимально возможный размер $b'' = (b''_1, b''_2, b''_3) = (15, 15, 20)$; посевной площади под каждый j — ый вид культуры; расход на выращивание единицы размера посевной площади каждого участка (в тыс. сомах) и урожайность культуры (в тоннах) задана матрицей

$$|\bar{c}_{ij}|_{33} = \begin{bmatrix} 42 & 44 & 11 \\ 44 & 47 & 14 \\ 48 & 50 & 20 \end{bmatrix}; |a_{ij}|_{33} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 10 & 15 & 6 \\ 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

и оптовая цена $\left(\frac{\text{тыс.руб.}}{\text{тонна}}\right)$ реализации на рынке сбыта за каждый вид сельхоз продукции $|c_j|_{1,3} = (c_1, c_2, c_3) = (8, 7, 5)$.

Требуется определить оптимальный размер посевной площади под каждый вид культуры так, чтобы получаемый суммарный доход хозяйства была максимальной.

Определим доход крестьянского хозяйства от реализации продукции каждой культуры выращенный на единице площади каждого участка хозяйства по формуле

$c_{ij} = a_{ij}c_j - \bar{c}_{ij}, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$, т. е., получим

$$|c_j|_{1,3} = \begin{bmatrix} 22 & 40 & 19 \\ 36 & 58 & 16 \\ 8 & 13 & 5 \end{bmatrix}.$$

Запишем числовую модель задачи.

Найти максимум

$$L(x) = 22x_{11} + 40x_{21} + 19x_{31} + 36x_{12} + 58x_{22} + 16x_{32} + 8x_{13} + 13x_{23} + 5x_{33} \quad (10)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^3 x_{1j} = 10, \sum_{j=1}^3 x_{2j} = 25, \sum_{j=1}^3 x_{3j} = 12, \quad (11)$$

$$10 \leq \sum_{i=1}^3 x_{i1} \leq 15, 11 \leq \sum_{i=1}^3 x_{i2} \leq 15, 12 \leq \sum_{i=1}^3 x_{i3} \leq 20, \quad (12)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где $x = \{x_{ij} : i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3\}$.

Преобразуем задачу (10) - (13).

Согласно методу решения задачи, имеем модель вида

Найти максимум

$$\begin{aligned} L(z, y) = & 22(z_{11} + y_{11}) + 40(z_{21} + y_{21}) + 19(z_{31} + y_{31}) + \\ & + 36(z_{12} + y_{12}) + 58(z_{22} + y_{22}) + 16(z_{32} + y_{32}) + \\ & + 8(z_{13} + y_{13}) + 13(z_{23} + y_{23}) + 5(z_{33} + y_{33}) \end{aligned} \quad (14)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^3 (z_{1j} + y_{1j}) = 10, \sum_{j=1}^3 (z_{2j} + y_{2j}) = 25, \sum_{j=1}^3 (z_{3j} + y_{3j}) = 12, \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^3 z_{ij} = 10, \sum_{i=1}^3 z_{i2} = 11, \sum_{i=1}^3 z_{i3} = 12, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^3 y_{ij} \leq 5, \sum_{i=1}^3 y_{i2} \leq 4, \sum_{i=1}^3 y_{i3} \leq 8, \quad (17)$$

$$z_{ij} \geq 0, y_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, \quad (18)$$

где $z = \{z_{ij} : i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3\}$ $y = \{y_{ij} : i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3\}$.

Числовая модель задачи (14)-(18) можно представить в виде:

			1	2	3	4	5	6
			10	5	11	4	12	8
1.	s_1	10	22	22	36	36	8	8
			z_{11}	y_{11}	z_{12}	y_{12}	z_{13}	y_{13}
2.	s_2	25	40	40	58	58	16	16
			z_{21}	y_{21}	z_{22}	y_{22}	z_{23}	y_{23}
3.	s_3	12	8	8	13	13	5	5
			z_{31}	y_{31}	z_{32}	y_{32}	z_{33}	y_{33}
4.	s_4	3	m	0	m	0	m	0

Решая задачу (14)-(18) с помощью программы, разработанной в лаборатории [1], определим оптимальный размер посевной площади под каждый вид культуры, позволяющий максимизировать доход хозяйства

$$z = \{z_{11} = 5, z_{13} = 5, z_{21} = 5, z_{22} = 11, z_{33} = 7\};$$

$$y = \{y_{21} = 5, y_{22} = 4, y_{33} = 5\}.$$

Объем получаемого дохода хозяйством при предлагаемом плане составляет $L(z, y) = 1480$ тыс. сомов.

Список использованных источников

1. Эшенкулов П., Жусупбаев А. Решение общей задачи линейного программирования. Программа на языке Pascal ABC // Свидетельство Кыргызпатента №1030 (учебное пособие). Зарегистрировано в Государственном реестре КР объектов авторского права от 2 мая 2008 года.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

Асанов А., Асанова К.А.

Кыргызско-Турецкий Университет Манас, ИМ НАН КР

Бул макалада экинчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин бир классын чыгаруу формуласынын негизинде, жарым октогу экинчи тартиптеги сызыктуу интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарын экспоненциалдык баалоонун жетишээрлик шарты аныкталды.

Урунттуу сөздөр. Формула, сызыктуу, дифференциалдык теңдемелер, интегро-дифференциалдык теңдемелер, экинчи тартип, экспоненциалдык баалоо.

В данной работе на основе формулы для одного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами установлены достаточные условия экспоненциальной оценки решений одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси.

Ключевые слова. Формула, линейные дифференциальные уравнения, интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, экспоненциальная оценка.

In this paper based on a formula for one class of second order linear differential equations with variable coefficients were established sufficient conditions of exponential estimate of solutions for one class of second order integro-differential equations on the semiaxis.

Keywords. Formula, linear differential equations, integro-differential equations, second order, exponential estimate.

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$y'' + p(t)y' + q(t)y + \int_{t_0}^t [Q(t,s)y(s) + P(t,s)y'(s)]ds = f(t), \quad t \geq t_0 \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = m, \quad y'(t_0) = n, \quad m, n \in R, \quad (2)$$

где $p(t), q(t), f(t), Q(t,s), P(t,s)$ – известные функции.

Вопросы ограниченности и асимптотической устойчивости решений на полуоси для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений изучались в работах [1-6]. В настоящей работе на основе результатов работы [7] и методом преобразований установлены достаточные условия экспоненциальной оценки решений интегро-дифференциального уравнение (1) на полуоси.

Предположим выполнения следующих условий:

$$a) q(t) = q_0(t) + q_1(t), \quad t \geq t_0, \quad (3)$$

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} K(t), \quad t \geq t_0, \quad (4)$$

$$K(t) = \frac{1}{2} \left[p(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \right], \quad (5)$$

где $q_0(t), q_1(t), K(t), p(t), f(t), \beta(t)$ – известные непрерывные функции на $[t_0, \infty)$, $\beta(t) > 0$ и $K(t) \geq 0$ при $t \in [t_0, \infty)$, $K'(t)$ и $\beta'(t)$ – производные функции соответственно $K(t)$ и $\beta(t)$.

$$б) \exp \left\{ \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau \right\} \frac{f(t)}{\beta(t)}, \exp \left\{ \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau \right\} \frac{P(t, t_0)}{\beta(t)} \in L_1(t_0, \infty),$$

$$\frac{1}{\beta(t)} [q_1(t) + P(t, t)] \in L_1(t_0, \infty),$$

$$\int_s^\infty \frac{1}{\beta(\tau)} |Q(\tau, s) - P'_s(\tau, s)| \exp \left\{ - \int_\tau^s K(\tau) d\tau \right\} d\tau \leq M(s), \quad M(s) \in L_1(t_0, \infty).$$

Подставляя (3) в (1), имеем

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) - q_1(t)y - \int_{t_0}^t [Q(t, s)y(s) + P(t, s)y'(s)] ds, \quad t \geq t_0. \quad (6)$$

Учитывая (2), (4), (5) и формулу (17) работы [7], из (6) получим

$$y(t) = my_1(t) + \frac{1}{\beta(t_0)} [K(t_0)m + n] y_2(t) + y_3(t), \quad (7)$$

где

$$y_1(t) = \exp \left\{ - \int_{t_0}^t K(s) ds \right\} \cos \left[\int_{t_0}^t \beta(s) ds \right], \quad (8)$$

$$y_2(t) = \exp \left\{ - \int_{t_0}^t K(s) ds \right\} \sin \left[\int_{t_0}^t \beta(s) ds \right], \quad (9)$$

$$y_3(t) = \int_{t_0}^t \exp \left\{ - \int_s^t K(\tau) d\tau \right\} \left[\frac{f(s) - q_1(s)y(s)}{\beta(s)} - \frac{1}{\beta(s)} \int_{t_0}^s P(s, t) y'(t) dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{\beta(s)} \int_{t_0}^s Q(s, t) y(t) dt \right] \sin \left[\int_s^t \beta(\tau) d\tau \right] ds. \quad (10)$$

Подставляя (8), (9) и (10) на (7) получим

$$\begin{aligned}
y(t) = & m \exp \left\{ - \int_{t_0}^t K(s) ds \right\} \cos \left[\int_{t_0}^t \beta(s) ds \right] + \frac{1}{\beta(t_0)} [K(t_0)m + n] \exp \left\{ - \int_{t_0}^t K(s) ds \right\} \times \\
& \times \sin \left[\int_{t_0}^t \beta(s) ds \right] + \int_{t_0}^t \exp \left\{ - \int_s^t K(\tau) d\tau \right\} \frac{f(s)}{\beta(s)} \sin \left[\int_s^t \beta(\tau) d\tau \right] ds - \\
& - \int_{t_0}^t \exp \left\{ - \int_s^t K(\tau) d\tau \right\} \left[\frac{q_1(s)}{\beta(s)} y(s) + \frac{1}{\beta(s)} \int_{t_0}^s P(s, t) y'(t) dt + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\beta(s)} \int_{t_0}^s Q(s, t) y(t) dt \right] \sin \left[\int_s^t \beta(\tau) d\tau \right] ds.
\end{aligned} \tag{11}$$

Учитывая формулу

$$\frac{1}{\beta(s)} \int_{t_0}^s P(s, t) y'(t) dt = \frac{1}{\beta(s)} P(s, s) y(s) - \frac{1}{\beta(s)} P(s, t_0) m - \frac{1}{\beta(s)} \int_{t_0}^s P'_t(s, t) y(t) dt,$$

из (11) имеем

$$\begin{aligned}
y(t) = & F_1(t) - \int_{t_0}^t \exp \left[- \int_s^t K(\tau) d\tau \right] \left\{ \frac{1}{\beta(s)} [q_1(s) + P(s, s)] y(s) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\beta(s)} \int_{t_0}^s [Q(s, t) - P'_t(s, t)] y(t) dt \right\} \sin \left[\int_s^t \beta(\tau) d\tau \right] ds,
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1(t) = & \exp \left\{ - \int_{t_0}^t K(s) ds \right\} \left\{ m \cos \left[\int_{t_0}^t \beta(s) ds \right] + \frac{1}{\beta(t_0)} [K(t_0)m + n] \sin \left[\int_{t_0}^t \beta(s) ds \right] + \right. \\
& \left. + \int_{t_0}^t \exp \left\{ \int_{t_0}^s K(\tau) d\tau \right\} \frac{1}{\beta(s)} [f(s) - P(s, t_0)m] \sin \left[\int_s^t \beta(\tau) d\tau \right] ds \right\}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Умножая уравнение (12) на $\exp \left\{ \int_{t_0}^t K(s) ds \right\}$, вводя обозначения

$$z(t) = y(t) \exp \left\{ \int_{t_0}^t K(s) ds \right\}, \quad t \geq t_0, \tag{14}$$

$$F(t) = F_1(t) \exp \left\{ \int_{t_0}^t K(s) ds \right\}, \quad t \geq t_0, \tag{15}$$

и применяя формулу Дирихле, получаем

$$z(t) = F(t) + \int_{t_0}^t H(t, s) z(s) ds, \quad t \geq t_0, \tag{16}$$

где

$$H(t, s) = -\frac{1}{\beta(s)}[q_1(s) + P(s, s)]\sin\left[\int_s^t \beta(\tau)d\tau\right] - \\ - \int_s^t \frac{1}{\beta(\tau)}[Q(\tau, s) - P'_s(\tau, s)]\exp\left\{\int_\tau^s K(\tau)d\tau\right\}\sin\left[\int_\tau^t \beta(\tau)d\tau\right]d\tau. \quad (17)$$

Теорема. Пусть выполняются условия а) и б). Тогда решение задачи Коши (1)-(2) удовлетворяет следующей оценке:

$$|y(t)| \leq c_1 \exp\left\{-\int_{t_0}^t K(s)ds\right\}, \quad t \geq t_0, \quad (18)$$

где

$$c_1 = c_2 \exp\left\{\int_{t_0}^\infty \left[\frac{1}{\beta(s)}|q_1(s) + P(s, s)| + M(s)\right]ds\right\}, \\ c_2 = |m| + \frac{1}{\beta(t_0)}|K(t_0)m + n| + \int_{t_0}^\infty \exp\left\{\int_{t_0}^s K(\tau)d\tau\right\} \frac{1}{\beta(s)}[|f(s)| + |P(s, t_0)m|]ds.$$

Доказательство. Учитывая условия а), б) и (13), из (15) и (17) имеем

$$|F(t)| \leq |m| + \frac{1}{\beta(t_0)}|K(t_0)m + n| + \int_{t_0}^\infty \exp\left\{\int_{t_0}^s K(\tau)d\tau\right\} \frac{1}{\beta(s)}[|f(s)| + \\ + |P(s, t_0)m|]ds \leq c_2, \quad t \geq t_0, \quad (19)$$

$$|H(t, s)| \leq \frac{1}{\beta(s)}|q_1(s) + P(s, s)| + M(s), \quad (20)$$

где $(t, s) \in G = \{(t, s) : t_0 \leq s \leq t < \infty\}$.

Далее, учитывая (19) и (20), из (16) получим

$$|z(t)| \leq \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{\beta(s)}|q_1(s) + P(s, s)| + M(s)\right]|z(s)|ds + c_2, \quad t \geq t_0, \quad (21)$$

Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, и учитывая (14), из (21) имеем оценку (18). Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия а), б) и $K(t) \geq \alpha > 0, t \in [t_0, \infty)$, α – постоянная. Тогда для решения задачи Коши (1)-(2) справедлива следующая оценка

$$|y(t)| \leq c_2 \exp\{-\alpha(t-t_0)\}, \quad t \geq t_0,$$

Пример. Рассмотрим задачи (1)-(2) для $t_0 = 0$, $p(t) = 0$,

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t), \quad q_0(t) = -\alpha^2 + a^2 \exp\{4\alpha t\},$$

$$q_1(t) = \frac{k_1 \exp[2\alpha t]}{(t + \beta_0)^{\alpha_0}}, \quad f(t) = \frac{f_0 \exp[\alpha t]}{(t + \beta_1)^{\alpha_1}},$$

$$Q(t, s) = a_0 \exp\{\gamma(t+s)\}, \quad P(t, s) = \frac{a_0}{\gamma} \exp\{\gamma(t+s)\},$$

где $\alpha, a, a_0, b_0, k_1, f_0, \beta_0, \beta_1, \gamma, \alpha_0, \alpha_1$ – известные постоянные, $\alpha > 0, \alpha_0 > 1, \alpha_1 > 1, a > 0$,

$$\beta_0 > 0, \beta_1 > 0, a_0 \neq 0, \gamma < \alpha.$$

В этом случае

$$K(t) = \alpha, \quad \beta(t) = a \exp[2\alpha t], \quad \beta'(t) = 2\alpha\beta(t), \quad \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = 2\alpha,$$

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} K(t) = -\alpha^2 + a^2 \exp\{4\alpha t\},$$

$$\exp\left[\int_0^s K(\tau) d\tau\right] \frac{f(t)}{\beta(t)} = \frac{f_0}{a} (t + \beta)^{-\alpha_1} \in L_1(0, \infty),$$

$$\int_s^\infty \frac{|Q(\tau, s) - P'_s(\tau, s)|}{\beta(\tau)} \exp\left\{-\int_\tau^s K(\tau) d\tau\right\} d\tau = 0 \in L_1(0, \infty).$$

Таким образом, в этом примере все условия следствия теоремы выполняются.

Список использованных источников

1. Искандаров С. О методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.35. – С. 31–35.
2. Искандаров С. Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.
3. Искандаров С., Шабданов Д.Н. Метод частичного срезаивания и ограниченность решений неявного вольтеррова интегро-дифференциального

уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып.33. – С. 67-71.

4. Искандаров С. Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 34 с.

5. Искандаров С. Об ограниченности и квадратичной интегрируемости на полуоси решений и их первых производных одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра //Изв. АН Киргиз.ССР. –1983. – № 1. – С.19-23.

6. Вель Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып.9. – С. 68-103.

7. Asanov A, Chelik H. M., Asanov R. One Formula for Solution of the Linear Differential Equations of the Second Order with the Variable Coefficients //Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 2012, vol. 8, N3, pp.321-328.

MSC 34K20, 45J05

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ И ИХ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА НЕЯВНОГО ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Искандаров С., Бокобаева З.Б.

Институт математики НАН Кыргызской Республики

Изделүүчү функциянын экинчи туундусуна карата чечилбеген экинчи тартиптеги сызыктуу Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеменин бардык чыгарылыштары жана алардын биринчи туундулары үчүн баалоолордун жетиштүү шарттары табылат. Бул үчүн теңдемени системага стандарттуу эмес келтирүү методу, салмактык функциялар методу, В.Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүп түзүү методу, кесүүчү функциялар методу жана интегралдык барабарсыздыктар методу өнүктүрүлөт.

Урунттуу сөздөр: айкын эмес интегро-дифференциалдык теңдеме, чыгарылыштарды баалоо, чыгарылыштардын биринчи туундуларын баалоо, теңдемени системага стандарттуу эмес келтирүү методу, салмактык функциялар методу, кесүүчү функциялар методу.

Устанавливаются достаточные условия для оценок на полуоси всех решений и их первых производных линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа Вольтерра, не разрешенного относительно второй производной искомой функции. Для этого развиваются нестандартный метод сведения к системе, метод весовых функций, метод преобразования уравнений В.Вольтерра, метод срезающих функций и метод интегральных неравенств.

Ключевые слова: неявное интегро-дифференциальное уравнение, оценка решений, оценка первых производных решений, нестандартный метод сведения к системе, метод весовых функций, метод срезающих функций.

Sufficient conditions are established for estimating on the semiaxis of all solutions and their first derivatives of a second-order linear integro-differential equation of Volterra type on the derivative of the desired function that is solvable with respect to the second. For this, a nonstandard method of reduction to the system, a weighting function method, a method of transforming V.Volterra equations, a method of shearing functions, and a method of integral inequalities are developed.

Keywords: implicit integro-differential equation, estimation of solutions, estimation of first derivatives of solutions, non-standard method of reduction to the system, weight functions method, method of cutting functions.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0, t \geq \tau \geq t_0; J = [t_0, \infty)$; ИДУ- интегро-дифференциальное уравнение; неявное ИДУ второго порядка -ИДУ второго порядка, содержащее в подынтеграле вторую производную неизвестной функции.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия, дающие оценки на J всех решений и их первых производных линейного неявного ИДУ второго порядка вида

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^t [Q_0(t, \tau)x(\tau) + Q_1(t, \tau)x'(\tau) + Q_2(t, \tau)x''(\tau)]d\tau = f(t), \quad t \geq t_0. \quad (1)$$

Отметим, что такая задача ранее решена в статье [1] модифицированным методом преобразования уравнений [2, с.28-29] и методом срезающих функций [2, с.41]. В настоящей работе для решения поставленной задачи развиваются нестандартный метод сведения к системе [3], метод весовых функций [2, с.27-28], метод преобразования уравнений В.Вольтерра [4, с.194-217], метод срезающих функций [2, с.41] и метод интегральных неравенств [5], что приведет к новым классам ИДУ (1).

В ИДУ (1) аналогично [3] сделаем следующую замену:

$$x'(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \quad x'(t) = -\lambda^2 x(t) + W(t)y(t), \quad (2)$$

где $0 < \lambda$ – некоторый вспомогательный параметр, $0 < W(t)$ – некоторая весовая функция, $y(t)$ – новая неизвестная функция.

Из (2) дифференцированием имеем

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\lambda^2 x'(t) + W'(t)y(t) + W(t)y'(t) = -\lambda^2[-\lambda^2 x(t) + W(t)y(t)] + \\ &+ W'(t)y(t) + W(t)y'(t) = \lambda^4 x(t) + [W'(t) - \lambda^2 W(t)]y(t) + W(t)y'(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь подставляем (2), (3) в ИДУ (1):

$$\begin{aligned} &\lambda^4 x(t) + [W'(t) - \lambda^2 W(t)]y(t) + W(t)y'(t) + a_1(t)[- \lambda^2 x(t) + W(t)y(t)] + \\ &+ a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^t \{ Q_0(t, \tau)x(\tau) + Q_1(t, \tau)[- \lambda^2 x(\tau) + W(\tau)y(\tau)] + \\ &+ Q_2(t, \tau)[\lambda^4 x(\tau) + (W'(\tau) - \lambda^2 W(\tau))y(\tau) + W(\tau)y'(\tau)] \} d\tau = f(t), \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

Отсюда после некоторых преобразований, аналогичных [3], получаем

$$\begin{aligned} &y'(t) + b_1(t)y(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^t [P_0(t, \tau)x(\tau) + P_1(t, \tau)y(\tau) + \\ &+ K(t, \tau)y'(\tau)] d\tau = F(t), \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} b_1(t) &\equiv a_1(t) - \lambda^2 + W'(t)(W(t))^{-1}, \quad b_0(t) \equiv (W(t))^{-1}[a_0(t) - \lambda^2 a_1(t) + \lambda^4], \\ P_0(t, \tau) &\equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t, \tau) - \lambda^2 Q_1(t, \tau) + \lambda^4 Q_2(t, \tau)], \quad P_1(t, \tau) \equiv (W(t))^{-1}\{Q_1(t, \tau)W(\tau) + \\ &+ Q_2(t, \tau)[W'(\tau) - \lambda^2 W(\tau)]\}, \quad K(t, \tau) \equiv (W(t))^{-1}Q_2(t, \tau)W(\tau), \quad F(t) \equiv (W(t))^{-1}f(t). \end{aligned}$$

Объединяя замену (2) и ИДУ (4), приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} x'(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \\ y'(t) + b_1(t)y(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^t [P_0(t, \tau)x(\tau) + P_1(t, \tau)y(\tau) + \\ + K(t, \tau)y'(\tau)] d\tau = F(t), \quad t \geq t_0, \end{cases} \quad (5)$$

эквивалентной заданному ИДУ второго порядка (1).

Пусть [6, 2]:

$$b_1(t) = b_{11}(t) + b_{12}(t), \quad (b_I)$$

$$K(t, \tau) = \sum_{i=1}^n K_i(t, \tau), \quad (K)$$

$$F(t) = \sum_{i=0}^n F_i(t), \quad (F)$$

$\psi_i(t)$ ($i=1, \dots, n$) – некоторые срезающие функции,

$$\begin{aligned} R_i(t, \tau) &\equiv K_i(t, \tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, \quad E_i(t) \equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1} \quad (i=1, \dots, n), \\ R_i(t, t_0) &= A_i(t) + B_i(t) \quad (i=1, \dots, n), \end{aligned} \quad (R)$$

$c_i(t)$ ($i=0, 1, \dots, n$) – некоторые функции.

Теперь первое уравнение системы (5) умножаем на $\varphi(t)x(t)$ ($0 < \varphi(t)$ – некоторая весовая функция), второе – на $y'(t)$, сложим полученные соотношения, затем интегрируем в пределах от t_0 до t , в том числе по частям, при этом вводим условия $(b_1), (K), (F)$, функции $\psi_i(t), R_i(t, \tau), E_i(t)$, условие (R), функции $c_0(t), c_i(t)$ ($i=1, \dots, n$). Тогда аналогично [6] будем иметь следующее тождество:

$$\begin{aligned} &\varphi(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^t \Delta(s)(x(s))^2 ds + 2 \int_{t_0}^t (y'(s))^2 ds + b_{11}(t)(y(t))^2 - \\ &- \int_{t_0}^t b'_{11}(s)(y(s))^2 ds + b_{12}(t)(y(t))^2 - 2F_0(t)y(t) + c_0(t) - \int_{t_0}^t [b'_{12}(s)(y(s))^2 - \\ &- 2F'_0(s)y(s) + c'_0(s)] ds + \sum_{i=1}^n \left\{ A_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 - \int_{t_0}^t A'_i(s)(Y_i(s, t_0))^2 ds + \right. \\ &+ B_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t, t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^t [B'_i(s)(Y_i(s, t_0))^2 - 2E'_i(s)Y_i(s, t_0) + \\ &+ c'_i(s)] ds + \int_{t_0}^t R'_{i\tau}(t, \tau)(Y_i(t, \tau))^2 d\tau - \int_{t_0}^s \int_{t_0}^s R''_{is\tau}(s, \tau)(Y_i(s, \tau))^2 d\tau ds \Big\} \equiv c_* + \\ &+ 2 \int_{t_0}^t W(s)\varphi(s)x(s)y(s)ds - 2 \int_{t_0}^t y'(s) \left\{ a_0(s)x(s) + \int_{t_0}^s [P_0(s, \tau)x(\tau) + P_1(s, \tau)y(\tau)] d\tau \right\} ds, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\Delta(t) \equiv 2\lambda^2 \varphi(t) - \varphi'(t), \quad Y_i(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \psi_i(\eta) y'(\eta) d\eta \quad (i=1, \dots, n),$$

$$c_* = \varphi(t_0)(x(t_0))^2 + b_{11}(t_0)(y(t_0))^2 - 2F_0(t_0)y(t_0) + c_0(t_0) + \sum_{i=1}^n c_i(t_0).$$

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $\lambda > 0, W(t) > 0, \varphi(t) > 0$, выполняются условия $(b_1), (K), (F), (R)$; 2) $\Delta(t) \geq 0$; 3) $b_{11}(t) \geq b_{110} > 0$, существует функция $b_{11}^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такая, что $b_{11}'(t) \leq b_{11}^*(t)b_{11}(t)$; 4) $b_{12}(t) \geq 0, b_{12}'(t) \leq 0$, существует функция $c_0(t)$ такая, что $(F_0^{(k)}(t))^2 \leq b_{12}^{(k)}(t)c_0^{(k)}(t) (k = 0, 1)$; 5) $A_i(t) \geq 0, B_i(t) \geq 0, B_i'(t) \leq 0, R_{ir}'(t, \tau) \geq 0$, существуют функции $A_i^*(t) \in L^1(J, R_+), c_i(t), R_i^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такие, что $A_i'(t) \leq A_i^*(t)A_i(t)$,

$$(E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t) \quad (i = 1, \dots, n; k = 0, 1); \quad 6) \quad W(t)(\varphi(t))^{\frac{1}{2}} + \left\{ |a_0(t)|(\varphi(t))^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t \left[|P_0(t, \tau)|(\varphi(\tau))^{\frac{1}{2}} + |P_1(t, \tau)| \right] d\tau \right\}^2 \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\}).$$

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (5) справедливы следующие утверждения:

$$x(t) = (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} 0(1), \quad (7)$$

$$y(t) = 0(1), \quad (8)$$

$$\Delta(t)(x(t))^2 \in L^1(J, R_+), (y'(t))^2 \in L^1(J, R_+), \quad (9)$$

а для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) верны оценка (7) и оценка:

$$x'(t) = \left[(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} + W(t) \right] 0(1). \quad (10)$$

Идея доказательства теоремы такова. Введем обозначение:

$$u(t) \equiv \varphi(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^t \Delta(s)(x(s))^2 ds + \int_{t_0}^t (y'(s))^2 ds + b_{11}(t)(x(t))^2 + \\ + \sum_{i=1}^n \left[A_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 + \int_{t_0}^t R_{ir}'(t, \tau)(Y_i(t, \tau))^2 d\tau \right]. \quad (11)$$

В силу условий 1)-3), 5) функция $u(t) \geq 0$, а также имеем:

$$\varphi(t)(x(t))^2 \leq u(t), \quad \int_{t_0}^t \Delta(s)(x(s))^2 ds \leq u(t), \quad \int_{t_0}^t (y'(s))^2 ds \leq u(t), \\ b_{11}(t)(x(t))^2 \leq u(t), \quad A_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 \leq u(t), \quad \int_{t_0}^t R_{ir}'(t, \tau)(Y_i(t, \tau))^2 d\tau \leq u(t). \quad (12)$$

Используя неравенство

$$2y'(t) \left\{ a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^t [P_0(t, \tau)x(\tau) + P_1(t, \tau)y(\tau)]d\tau \right\} \leq (y'(t))^2 + \\ + \left\{ |a_0(t)| |x(t)| + \int_{t_0}^t [|P_0(t, \tau)| |x(\tau)| + |P_1(t, \tau)| |y(\tau)|]d\tau \right\}^2$$

к последнему интегралу в правой части тождества (6), переходим к интегральному неравенству

$$u(t) \leq c_* + \int_{t_0}^t \left\{ 2W(s)(\varphi(s))^{\frac{1}{2}}(b_{11}(s))^{-\frac{1}{2}} + b_{11}^*(s) + \sum_{i=1}^n [A_i^*(s) + R_i^*(s)] \right\} u(s)ds + \\ + \int_{t_0}^t \left\{ |a_0(s)| (\varphi(s))^{-\frac{1}{2}} (u(s))^{\frac{1}{2}} + \int_{t_0}^s [|P_0(s, \tau)| (\varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}} + |P_1(s, \tau)| (b_{11}(\tau))^{-\frac{1}{2}}] (u(\tau))^{\frac{1}{2}} \right\} ds. \quad (13)$$

Применение к интегральному неравенству (13) лемму из статьи [6] дает $u(t) = 0(1)$, при этом учитываются условия (3) ($b_{110} \leq b_{11}(t) = 0(1)$), 5), 6) теоремы. Отсюда на основании соотношений (12) получаем все утверждения теоремы. В частности, утверждение (7) теоремы вытекает из $\varphi(t)(x(t))^2 \leq u(t) = 0(1)$, а утверждение (10) - из замены (2) с учетом утверждений (7), (8) теоремы.

Таким образом, доказанная нами теорема утверждает, что для любого решения и его первой производной ИДУ (1) справедливы оценки (7), (10) соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из оценок (7), (10) можно вывести следствие об ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуинтервале J , стремлении к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при $t \rightarrow \infty$ всех решений и их первых производных ИДУ (1) соответственно.

Список использованных источников

1. Искандаров С. Об асимптотическом поведении решений одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра, неразрешенных относительно второй производной // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1985.- Вып.18.- С.169-173.

2. Искандаров С. Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра.- Бишкек: Илим, 2002.- 216 с.
3. Искандаров С. О методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Бишкек: Илим, 2006.- Вып.35.- С.31-35.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с фр. /Под ред. Ю.М.Свирижева.- Москва: Наука, 1976.- 288 с.
5. Искандаров С. Об ограниченности, устойчивости и принадлежности пространству $L^2[t_0, \infty)$ решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1981.- Вып. 14.- С.149-158.
6. Искандаров С. Достаточные условия ограниченности и устойчивости решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка типа Вольтерра. Неограниченность решений линейных однородных уравнений первого порядка //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1980.- Вып.13.- С.149-184.

MSC 34K20,45J05

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ЧАСТИЧНОГО СРЕЗЫВАНИЯ И СТЕПЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НА ПОЛУОСИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Искандаров С.

Институт математики НАН Кыргызской Республики

Экинчи түрдөгү Вольтерра тибиндеги сызыктуу интегралдык тендемелер системасынын чыгарылышын тиешелүү компоненттеринин жарым окто абсолюттук жана квадраттык интегралданышынын жетиштүү шарттары табылат. Изилдөө учурунда каралган системанын бош мүчөсү жарым окто абсолюттук жана квадраттык интегралданбашы мүмкүн. Матрицалык салмактык функциялар методу, жекече кесүү методунун вектордук аналогу өнүктүрүлөт жана Я.В. Быковдун негизги леммасы колдонулат.

Урунттуу сөздөр: экинчи түрдөгү Вольтерра тибиндеги интегралдык теңдемелер системасы, абсолюттук интегралданыш, квадраттык интегралданыш, матрицалык салмактык функциялар методу, матрицалык жекече кесүү методу, Я.В. Быковдун негизги леммасы.

Устанавливаются достаточные условия абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси компонент решения системы линейных интегральных уравнений второго рода типа Вольтерра в случае, когда свободный член этой системы может не обладать соответствующими изучаемыми свойствами. Развиваются матричный метод весовых функций, векторный аналог метода частичного срезывания и применяется основная лемма Я.В.Быкова об интегральном неравенстве.

Ключевые слова: система интегральных уравнений второго рода типа Вольтерра, абсолютная интегрируемость, квадратичная интегрируемость, матричный метод частичного срезывания, основная лемма Я.В.Быкова.

Sufficient conditions are established for the absolute and quadratic integrability on the semi-axis of the components of the solution of a system of linear integral equations of the second kind of Volterra type in the case when the free term of this system may not have the corresponding studied properties. The matrix method of weight functions, the vector analogue of the partial shear method, are developed and the main lemma of Ya.V. Bykov on integral inequality is applied.

Keywords: Volterra type system of integral equations of the second kind, absolute integrability, quadratic integrability, matrix partial shear method, main lemma of Ya.V. Bykov.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $I = [t_0, \infty)$; ИУ-интегральное уравнение; СИУ-система ИУ; соотношения для матриц понимаются как соотношения для их квадратичных форм для любых ненулевых векторов; $\langle x, y \rangle$ - скалярное произведение $n \times l$ векторов x, y ; A^T -транспонированная для матрицы A .

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия принадлежности пространствам $L^p(I, R)$ ($p = 1, 2$) компонент $x_\nu(t)$ ($1 \leq \nu \leq n$) решения $x(t) = (x_\nu(t))$ n -мерной системы линейных ИУ типа Вольтерра второго рода вида

$$x(t) + \int_{t_0}^t Q(t, \tau)x(\tau)d\tau = q(t), t \geq t_0 \quad (1)$$

без предположения, что ее свободный член $q(t) = (q_\nu(t))$ обладает свойством: $q_\nu(t) \in L^p(I, R)$ ($1 \leq \nu \leq n$; $p = 1, 2$) соответственно.

Отметим, что имеются очень много результатов по сохранению свойств свободного члена для решений скалярных и векторных ИУ вида (1) и это отражено, например, в обзорной статье З.Б.Цалюка [1]. Насколько нам известно, есть результаты по стремлению к нулю при $t \rightarrow \infty$ решения ИУ вида (1) с разностным ядром в случае, когда свободный член может не стремиться к нулю $t \rightarrow \infty$, что отражено в статьях С.С.Сордуняну [2], V.Dolezal [3]. Для ИУ

вида (1) с неразностным ядром решение сформулированной задачи для $x(t) \in L^2(I, R)$ в скалярном случае начато и проведено в статьях автора [4,5]. В работах Ю.А.Ведь и автора [6], автора [7-9] эта задача решена методом матричных весовых и срезающих функций автора, а в работе автора [10]-матричным методом частичного срезаивания автора.

В настоящей работе к решению поставленной задачи развивается матричный метод частичного срезаивания [10], что приведет к исследованию новых классов СИУ (1) и получению новых научных результатов.

Пусть [8-10]: $0 < \Phi(t)$ - некоторая $n \times n$ матричная весовая функция,

$$Q(t, \tau) = \sum_{i=1}^m Q_i(t, \tau), \quad q(t) = \sum_{j=1}^k q_j(t), \quad (Q), (q)$$

$\Psi_j(t)$ - некоторые $n \times n$ матричные неособенные срезающие функции, которые порождают $P_j(t)$ - $n \times n$, $T_j(t, \tau)$ - $n \times n$ матричных, $F_j(t)$ - $n \times I$ векторных функций следующим образом:

$$P_j(t) \equiv (\Psi_j^{-1}(t))^T \Phi^T(t) Q_j(t, t) (\Psi_j^{-1}(t)), \quad T_j(t, \tau) \equiv \Phi^T(t) Q_j(t, \tau) (\Psi_i^{-1}(\tau)), \quad F_j(t) \equiv (\Psi_j^{-1}(t))^T \Phi^T(t) q_j(t), \quad (j = 1..k), \quad \text{причем матрицы } P_j(t) \text{ - симметрические;}$$

$$P_i(t) = M_j(t) + N_j(t) (j = 1..k); \quad (P)$$

$b_j(t) (j = 1..k)$ - некоторые скалярные функции.

Будем говорить, что $T_j(t, \tau)$ - частично срезанные $n \times n$ матричные функции.

В дальнейшем нам понадобится следующая

ЛЕММА [10]. Справедливы преобразования двойного интеграла

$$\begin{aligned} & 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s < Q_j(s, \tau) x(\tau), \Phi(s) x(s) > d\tau ds \\ &= 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s < \Phi^T(s) Q_j(s, \tau) \Psi_i^{-1}(\tau) \Psi_j(\tau), x(s) > d\tau ds \\ &= 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s < T_j(s, \tau) z_j(\tau), x(s) > d\tau ds = \\ & 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s < T_j(s, \tau) Z'_{j\tau}(\tau, t_0), x(s) > d\tau ds = 2 \int_{t_0}^t < T_j(s, s) Z_j(s, t_0), x(s) > ds - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle T'_{j\tau}(s, \tau) Z_j(\tau, t_0), x(s) \rangle d\tau ds = \\
& = 2 \int_{t_0}^t \langle T_j(s, s) Z_j(s, t_0), \Psi_j^{-1}(s) \Psi_j(s) x(s) \rangle \\
& > ds - 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle T'_{j\tau}(s, \tau) Z_j(s, \tau), x(s) \rangle d\tau ds = \\
& = 2 \int_{t_0}^t \langle (\Psi_j^{-1}(s))^T T_j(s, s) Z_j(s, t_0), Z'_{js}(s, t_0) \rangle ds - \\
& \quad - 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle T'_{j\tau}(s, \tau) Z_j(s, \tau), x(s) \rangle d\tau ds = \\
& \quad = 2 \int_{t_0}^t \langle P_j(s) Z_j(s, t_0), Z'_{js}(s, t_0) \rangle ds - \\
& - 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle T'_{j\tau}(s, \tau) Z_j(s, \tau), x(s) \rangle d\tau ds = \langle P_j(t) Z_j(t, t_0), Z_j(t, t_0) \rangle - \\
& \quad - \int_{t_0}^t \langle (P'_j(s) Z_j(s, t_0), Z_j(s, t_0) \rangle ds - \\
& \quad - 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle T'_{j\tau}(s, \tau) Z_j(s, \tau), x(s) \rangle d\tau ds (j = 1..k), \tag{2}
\end{aligned}$$

где $Z_j(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \Psi_j(\eta) x(\eta) d\eta (j = 1..k)$ и интегралов

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \langle q(s), \Phi(s) x(s) \rangle ds = \int_{t_0}^t \langle \Phi^T(s) q(s), \Psi_j^{-1}(s) \Psi_j(s) x(s) \rangle ds \\
& = \int_{t_0}^t \langle (\Psi_j^{-1}(s))^T \Phi^T(s) q(s), Z'_{js}(s, t_0) \rangle ds = \\
& = \int_{t_0}^t \langle F_j(s), Z'_{js}(s, t_0) \rangle ds = \langle F_j(t), Z_j(t, t_0) \rangle - \\
& \quad - \int_{t_0}^t \langle F'_j(s), Z_j(s, t_0) \rangle ds (j = 1..k); \tag{3} \\
& b_j(t) = \int_{t_0}^t \langle b'_j(s) ds - b_j(t_0) \rangle (i = 1..k).
\end{aligned}$$

Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle Q_j(s, \tau)x(\tau), \Phi(s)x(s) \rangle d\tau ds - 2 \int_{t_0}^t \langle q(s), \Phi(s)x(s) \rangle ds = \\
& = \langle P_j(t)Z_j(t, t_0), Z_j(t, t_0) \rangle - 2 \langle F_j(t), Z_j(t, t_0) \rangle + b_j(t) - b_j(t_0) - \\
& - \int_{t_0}^t [\langle P'_j(s)Z_j(s, t_0), Z_j(s, t_0) \rangle - 2 \langle F'_j(s), Z_j(s, t_0) \rangle + b'_j(s)] ds - \\
& - 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle T'_{j\tau}(s, \tau)Z_j(s, t_0), x(s) \rangle d\tau ds \quad (j = 1..k). \tag{4}
\end{aligned}$$

При установлении соотношений (2), (3) применен метод интегрирования по частям, при этом матрицы $P_j(t)$ - симметрические ($j = 1..k$).

Далее для решения $x(t)$ систему (1) умножаем скалярно на вектор $\Phi(t)x(t)$, интегрируем в пределах от t_0 до t , в том числе по частям, при этом вводим условия $(Q), (q)$, функции $P_j(t), T_j(t, \tau), b_j(t) (j = 1..k)$, условия (P) . Тогда получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{t_0}^t \langle \Phi(s)x(s), x(s) \rangle ds + \\
& + \sum_{j=1}^k \{ \langle M_j(t)Z_j(t, t_0), Z_j(t, t_0) \rangle + \langle N_j(t)Z_j(t, t_0), Z_j(t, t_0) \rangle - \\
& - 2 \langle F_j(t), Z_j(t, t_0) \rangle + b_j(t) - \int_{t_0}^t [\langle M'_j(s)Z_j(s, t_0), Z_j(s, t_0) \rangle + \\
& + \langle N'_j(s)Z_j(s, t_0), Z_j(s, t_0) \rangle - 2 \langle F'_j(s), Z_j(s, t_0) \rangle + b'_j(s)] ds - \\
& - 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle T'_{j\tau}(s, \tau)Z_j(s, \tau), x(s) \rangle d\tau ds \equiv c_*, \tag{5}
\end{aligned}$$

где $c_* = \sum_{j=1}^k b_j(t_0)$.

Переходом от тождества (5) к интегральному неравенству, применением неравенства Коши-Буняковского и основной леммы Я.В.Быкова [11, с. 121], доказывается

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $\Phi(t) > 0$, выполняются условия $(Q), (q), (P)$;

2) существует диагональная $n \times n$ матричная функция $\varphi(t) = (\varphi_\nu(t))$ $c\varphi_\nu(t) > 0$ ($\nu = 1..n$) такая, что $\Phi(t) > \varphi(t)$ и существует $const = \varepsilon \in (0,1)$ такая, что $\Delta(t) \equiv 2 - \varepsilon \sum_{\nu=1}^n (\varphi_\nu(t))^{-1} \geq \Delta_0 > 0$;

3) существует скалярная функция $\mu(t) > 0$ такая, что

$$M_j(t) \geq (t)(j = 1..k);$$

4) $N_j(t) \geq 0, N_j'(t) \leq 0$, существуют скалярные функции $b_j(t)$ такие, что для любых $n \times 1$ векторов v_i :

$$(-1)^r \left[\langle N_j^{(r)}(t)v_j, v_j \rangle - 2 \langle F_j^{(r)}(t), v_j \rangle + b_j^{(r)}(t) \right] \geq 0 \quad (r = 0, 1; j = 1..k);$$

$$5) \int_{t_0}^t \|T'_{jt}(t, \tau)\| (\mu(\tau))^{-\frac{1}{2}} \in L^2(I, R_+)(j = 1..k).$$

Тогда для компонент $x_\nu(t) (\nu = 1..n)$ решения $x(t) = (x_\nu(t))$ СИУ(1) справедливы утверждения:

$$\varphi_\nu(t)(x_\nu(t))^2 \in L^1(I, R_+) \quad (\nu = 1..n). \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях теоремы под нормами для $n \times n$ матрицы A и $n \times 1$ вектора $a = (a_\nu)$ понимается [12, с.35]:

$\|A\| = \sqrt{A^T A} = \max \lambda_\nu A^T A (\nu = 1..n), \lambda_\nu (\nu = 1..n)$ - собственные значения симметрической матрицы $A^T A; \|A\| = (\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2)^{\frac{1}{2}}$ - евклидова длина.

Из теоремы аналогично теореме 2 [13] вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняются все условия теоремы и $\varphi_\nu(t) \geq \varphi_{\nu 0} > 0$ (соответственно $(\varphi_\nu(t))^{-1} \in L^1(I, R_+ \setminus \{0\})$ ($1 \leq \nu \leq n$, то для компонент $x_\nu(t) (\nu = 1..n)$ решения $x(t) = (x_\nu(t))$ СИУ (1) верны утверждения: $x_\nu(t) \in L^2(I, R)$ соответственно $x_\nu(t) \in L^1(I, R)$ ($1 \leq \nu \leq n$).

Приведем простейший иллюстративный пример скалярного ИУ (1).

ПРИМЕР. Для ИУ

$$x(t) + \int_0^t (t+1)^{-2} \{ [10 + \exp(e^{-7t-7\tau})] (t\tau)^{12} (\sin 3t \sin 3\tau)^{\frac{1}{5}} \} x(\tau) d\tau = \\ = \frac{t^{12} (\sin 3t)}{(t+1)^2}, \quad t \geq 0$$

выполняются все условия теоремы и следствия при $\varphi(t) = (t+1)^2$, здесь $t_0 = 0, k=1, \Psi_1(t) \equiv t^{12} (\sin 3t)^{1/5}$,

$$T_1(t, \tau) \equiv [10 + \exp(e^{-7t-7\tau})]t^{12}(\sin 3t)^{1/5}, F_1(t) \equiv 1, P_1(t) \equiv 10 + \exp(e^{-14t}), M_1(t) \equiv 9 + \exp(e^{-14t}) > 0, N_1(t) \equiv 1, b_1(t) \equiv 1,$$

$$T'_{1\tau}(t, \tau) \equiv -7e^{-7t-7\tau}\exp(e^{-7t-7\tau})t^{12}(\sin 3t)^{1/5}$$

Следовательно, решение $x(t)$ этого ИУ принадлежит пространствам $L^p(R_+, R)(p = 1, 2)$.

Заметим, что решение поставленной задачи может иметь практическое значение в теории автоматического управления [14].

Список использованных источников

1. Цалюк З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Сер. мат. анализ. – Москва: ВИНТИ, 1977. – Т.15. – С.131-198.
2. Corduneanu C. Sur une equation integrale de la theorie du reglage automatique // C.r. Acad.sci. – 1963. – Т.256, N 17. – P.3564-3567.
3. Dolezal V. An extension of Popov's method for vector-valued nonlinearities // Чехосл. мат. журн. – 1965. – Т. 15(90), N 3. – P.436-453.
4. Искандаров С. О принадлежности пространству $L^2[t_0, \infty)$ решения интегрального уравнения Вольтерра // Тез. докл. Всесоюз. конф. по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1979. – Ч.1. – С.150-151,
5. Искандаров С. К вопросу о принадлежности пространству $L^2[t_0, \infty)$ решения интегрального уравнения типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып.13. – С.193-198.
6. Ведь Ю.А., Искандаров С. Асимптотические свойства решений линейных вольтерровых интегральных систем // III Уральск. Регион.конф. «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения», Пермь, февр.1988г.: Тез. докл. – Пермь: Пермск. гос. ун-т, 1988. – С.101,
7. Искандаров С. О степенной абсолютной интегрируемости на полуоси решений систем нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра

//Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1989. – Вып.22. – С.89-92.

8. Искандаров С. Метод матричных весовых и срезающих функций в асимптотической теории вольтерровых уравнений на полуоси // Укр. конф. «Моделирование и исслед. устойчивости систем» (Моделирование систем), Киев, май 1995г.: тез. докл. конф. – Киев, 1995. – С.50.

9. Искандаров С. Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс....докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 34с.

10. Iskandarov S. Matrix method of partial cutting and power absolute integrated of the solution of Volterra systems of linear integral equations // Abstracts of the V international scientific conf. «Asymptotical, topological and computer methods in mathematics» devoted to the 85 anniversary of acad. M.Imanaliev, Kyrgyzstan, Bishkek, 13 sept. 2016. – Bishkek: Ала-Тоо Полиграф Сервис, 2016. – P.15.

11. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. – 328 с.

12. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 224 с.

13. Искандаров С. Об асимптотических свойствах решений системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. – Вып.17. – С.166-174.

14. Баркин А.И. Оценки качества нелинейных систем регулирования. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.

MSC 49M37

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ВЛОЖЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ АГРОФИРМ

Жусупбаев А., Жусупбаева Г.А.

Институт математики НАН КР, Кыргызский аграрный университет

Агрофирмаларга инвестицияны оптималдуу бөлүштүрүү маселесине математикалык модель тургузулган. Моделдиниш жөндөмдүүлүгүн сандык мисалда көрсөтүлгөн.

Урунттуу сөздөр. Математикалык модель, өндүрүш, инвестиция, аймак, экономиканын агрардык сектору, айыл – чарба продукциясы, таза киреше, киреше.

В работе сформулирована математическая модель задачи оптимального распределения инвестиционного вложения между агрофирмами. Работоспособность модели продемонстрирована на числовом примере.

Ключевые слова. Математическая модель, производство, инвестиционные вложения, регион, аграрный сектор экономики, сельхозпродукция, прибыль, доход.

The paper presents a mathematical model of the problem of optimal distribution of investment between agricultural firms. The performance of the model is demonstrated by a numerical example.

Keywords. Mathematical model, production, investment, region, agricultural sector, agricultural products, profit, income.

В условиях рыночных отношений экономика региона не может успешно развиваться без инвестиций, поскольку без инвестиций невозможно создание капитала, обеспечение конкурентоспособности товаропроизводителей на внешнем рынке. Процессы структурного и качественного обновления мирового товаро-производства и рыночной инфраструктуры происходят исключительно путем и за счет инвестиций. Международная практика показала не раз, что недостаточное количество инвестиций является важным аспектом и препятствием динамического роста экономики региона и без достаточных инвестиционных накоплений экономика региона должным образом не развивается.

Инвестиция - совокупность материальных, финансовых и иных затрат, осуществляемых в форме долгосрочных вложений капитала в объекты предпринимательской и других видов экономической деятельности. К ним относятся целевые вклады, паи, акции, ценные бумаги, технологии, машины,

оборудование, лицензии, кредиты, имущество и имущественные права, а также передача прав на интеллектуальную собственность. Смысловое значение «Инвестиции» - от латинского слова «invest»- вкладывать [1].

Инвестиции, как важнейшая экономическая категория, выполняют функции, без которых невозможно развитие экономики: повышение производственного потенциала, ускорение научно-технического прогресса и внедрение инновационных технологий, прогрессивного современного оборудования, обновление и модернизация оборудования, улучшение качества выпускаемой продукции, товаров, услуг и повышение их конкурентоспособности, развитие отраслей экономики, решение социальных программ, развитие общества, охрана окружающей среды и природных ресурсов.

Повышение эффективности аграрного сектора экономики регионов республики данный момент потребуются большие инвестиционные вложения.

Ниже делаем попытки сформулировать математическую модель задачи оптимального распределения инвестиции между агрофирмами на экономической развитии.

Постановка задачи. Пусть в рассматриваемом регионе имеется m агрофирм с различными возможностями на производства сельхоз продукции в зависимости от выбранной ими видов деятельности. Считается известным объем инвестиционного вложения выделенный государством на экономическую развитию региона и план необходимого объема производства сельхоз продукции по региону, а также оптовая цена реализации каждого вида сельхоз продукции агрофирм. Для каждой агрофирмы в зависимости от выбранной ими деятельности считаем известным потребность по инвестиционному вложению и объемы производства сельхоз продукции по каждому виду, объем продукции собственного потребления и расходы на внутренние нужды агрофирмы.

Требуется определить план распределения инвестиционного вложения, направляемой на экономическую развитию региона, между агрофирмами так,

чтобы получаемая суммарная прибыль от производства и реализации сельхоз продукции по региону была максимальной.

Математическая модель этой задачи может быть представлена в виде.

Найти максимум

$$P(x, y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} - \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} c_i^r y_i^r \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{r \in R} (q_{ij}^r - a_{ij}^r) y_i^r = x_{ij}, i \in I, j \in J, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{r \in R} k_i^r y_i^r \leq G, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq b_j, j \in J, \quad (4)$$

$$\sum_{r \in R} y_i^r = 1, i \in I, \quad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0, i \in I, j \in J, \quad (6)$$

где $x = \{x_{ij}, i \in I, j \in J\}$, $y = \{y_i^r, i \in I, r \in R\}$,

i - индекс агрофирм в регионе, $i \in I$;

I - множество индексов агрофирм региона, $I = \{1, 2, \dots, m\}$;

r - индекс вида деятельности агрофирм, $r \in R$;

R - множество индексов вида деятельности агрофирм, $R = \{1, 2, \dots, p\}$;

j - индекс вида продукции производимый агрофирмами региона;

J_r - множество индексов вида продукции производимые агрофирмой

региона по r -ой деятельности, $J = \bigcup_{r \in R} J_r$;

J - множество индексов вида продукции производимые агрофирмой региона.

Известные параметры:

q_{ij}^r - объем производства продукции j -го вида i -ой агрофирмы по r -ой деятельности, $i \in I, j \in J_r, r \in R$;

c_i^r - затраты i -ой агрофирмы региона по r -ой деятельности, где

$$c_i^r = OT_i^r + A_p \Pi_i^r + C_r \Pi_i^r + AO_i^r + PK_i^r + P_p P_i^r, i \in I, r \in R.$$

Здесь c_i^r - затраты агрофирмы включают в себе переменные расходы и постоянные издержки, как OT_i^r - оплата труда i -ой агрофирмы по r -ой деятельности, $A_p \Pi_i^r$ - арендная плата, $C_r \Pi_i^r$ - страховые платежи, AO_i^r - амортизационные отчисления, PK_i^r - процентная плата инвестиционного вложения и $P_p P_i^r$ - прочие расходы;

a_{ij}^r - объем собственного потребления и расходы на внутренние нужды j -го вида продукции i -ой агрофирмы по r -ой деятельности, $j \in J, r \in R, i \in I$;

k_i^r - размер потребности на инвестиционные вложения i -ой агрофирмы по r -му варианту деятельности, $r \in R, i \in I$;

G - объем выделенного инвестиционного вложения государством на экономическую развитию агрофирм региона;

b_j - спрос на j -й вид сельхоз продукции по региону, $j \in J$;

d_{ij} - реализуемая цена единицы объема сельхоз продукции j -го вида i -ой агрофирмы в регионе, $i \in I, j \in J$.

Искомая переменная:

x_{ij} - объем реализуемой сельхоз продукции j -го вида i -ой агрофирмы, $i \in I, j \in J$. y_i^r - булева переменная принимающая значение 0 или 1, $i \in I, r \in R$.

Целевая функция (1) определяет суммарного объема чистого дохода агрофирмы района. Ограничения (2) показывают на то, что разность объема сельхоз продукции производимой агрофирмой и объем собственного потребления по соответствующей деятельности, должен быть равна объему реализуемой продукции.

Ограничения (3) требует, что суммарный объем спроса инвестиции агрофирм региона не должна быть больше чем объема инвестиции выделенному на экономическому развитию региона.

Равенство (4) показывает, что суммарный объем производимой по каждому виду сельхозпродукции агрофирм региона должна быть больше или равна заданному необходимому объему потребности по этому виду продукции в регионе.

Условия (5) указывает, что каждая агрофирма региона должна выбрать только одного вида производственной деятельности.

Неравенство (6) требует не отрицательности искомым переменных.

Задача (1)-(6) является частично целочисленной задачей, для решения которой могут быть применены известные методы математического программирования [2].

Проверим работоспособность сформулированной математической модели (1) – (6) на числовом примере.

Пример. Пусть в регионе имеется 3(три) агрофирмы, где имеется возможность производить продукцию по растениеводству, овощеводству, садоводству и животноводству.

Имеющиеся ресурсы (в га) агрофирм приведены в таблице 1, а урожайность (продуктивность) и рыночная цена единицы объема продукции приведенный в таблице 2.

Для экономического развития агрофирм региона выделена государством инвестиционного вложения в размере $G = 70000000$ сомов.

Каждая агрофирма выбирает свою возможность развития - одну из четырех форм деятельности $r=1,2,3,0$.

Ресурсы агрофирмы

Таблица 1

		I агрофирма	II агрофирма	III агрофирма
Растениеводство	Зерно	300га	500 га	400 га
	Многолетние травы	200га	400 га	300 га
Овощеводство	Лук	50га	100 га	100 га
	Картофель	100га	100 га	200 га
Садоводство	Виноград	150 га	50 га	100 га
	Яблоко	100га	150 га	100 га
животноводство	Молоко	300 гол.дой.коров	200 гол.дой.коров	500 гол.дой.коров

	мясо	250гол.	500 гол.	500 гол.
--	------	---------	----------	----------

Урожайность с одного (га)

Таблица 2

		I агрофирма	II агрофирма	III агрофирма	Рыночная цена
Растениеводство	Зерно в (т)	1,8	2,0	3,0	14с/кг
	Многолетние травы в (т)	4,5	4,5	6,0	5с/кг
Овощеводство	Лук в (т)	3,0	3,0	4,5	10с/кг
	Картофель в (т)	6,5	7,0	11,0	10с/кг
Садоводство	Виноград в (т)	25,0	25,0	20,0	30с/кг
	Яблоко в (т)	30,0	30,0	25,0	12с/кг
животноводство	Молоко 1 кор.год	4,0т	4,0т	4,8т	20с/кг
	мясо в (т)	300кг*4=1,2т	1,2т	1,2т	250с/кг

Каждый вид деятельности агрофирмы и соответствующие объемы капитальных затрат (инвестиции) , а также расход на единицы размера посевной площади под каждый вид культуры приведена в таблицах 3,4,5.

I агрофирма

Таблица 3

		$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=0$	Средние расходы
Растениеводство	Зерно	300+500=800	300+500=800	300	300	12900с/га
	Многолетние травы	200+200=400	200+500=700	200+200=400	200	9650с/га
Овощеводство	Лук	50+200=250	50	50	50	43450с/га
	Картофель	100+100=200	100	100	100	41950с/га
Садоводство	Виноград	150	150	150	150	30000с/га
	Яблоко	100	100	100	100	20000с/га
животноводство	Молоко в (шт)	300дойных	300дойных	300+200=500дойных	300	40000с/гол.
	мясо в (шт)	250 мяса	250 мяса	250+250=500	250	55000*4сезон=220000с/гол.
	K_1^r	5млн.сом	10млн.сом	20млн.сом	0	

II агрофирма

Таблица 4

		$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=0$	расходы
Растениеводство	Зерно	500+700=1200	500+900=1400	500	500	12000с/га
	Многолетние травы	400+200=600	400	400+500=900	400	9000с/га
Овощеводство	Лук	100+100=200	100	100	100	43000с/га
	Картофель	100+200=300	100+300=400	100	100	41500с/га
Садоводство	Виноград	50	50	50	50	25000с/га
	Яблоко	150	150	150	150	15000с/га
животноводство	Молоко в (шт)	200дойных	200дойных	200+500=700дой	200	40000с/гол.

		коров	коров	ных		
	мясо в (шт)	500 мяса	500 мяса	500+5000=1000 мяса	500	220000с/гол.
	k_2^r	7млн.сом	7млн.сом	25млн.сом	0	

Требуется определить план распределения инвестиции между тремя агрофирмами региона так, чтобы получаемая суммарная прибыль от производства и реализации сельхозпродукции по региону была максимальной.

I II агрофирма

Таблица 5

		$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=0$	расходы
Растениеводство	Зерно	400+600=1000	400+900=1300	400	400	13000с/га
	Многолетние травы	300+700=1000	300+300=600	300+500=800	300	10000с/га
Овощеводство	Лук	100+200=300	100	100	100	43000с/га
	Картофель	200+500=700	200+800=1000	200	200	42000с/га
Садоводство	Виноград	100	100	100	100	30000с/га
	Яблоко	100	100	100	100	15000с/га
животноводство	Молоко в (шт)	500дойных коров	500дойных коров	500+500=1000до йных коров	500	40000с/гол.
	мясо в (шт)	500 мяса	500 мяса	500+5000=1000 мяса	500	220000с/гол.
	k_3^r	10млн.сом	8млн.сом	25млн.сом	0	

Используя данные таблиц 2-5, вычислим следующие необходимые параметры: -производственные затраты на каждый вид продукции $j=1,2,...,8$ агрофирмы по r -ой деятельности за год $r=1,2,3$

$$|c_{1j}^r|_{8,4} = \begin{pmatrix} r=1 & r=2 & r=3 & r=0 \\ 10320000 & 10320000 & 3870000 & 3870000 \\ 3860000 & 6755000 & 3860000 & 1930000 \\ 10862500 & 2172500 & 2172500 & 2172500 \\ 8390000 & 4195000 & 4195000 & 4195000 \\ 4500000 & 4500000 & 4500000 & 4500000 \\ 2000000 & 2000000 & 2000000 & 2000000 \\ 12000000 & 12000000 & 20000000 & 12000000 \\ 55000000 & 55000000 & 110000000 & 55000000 \end{pmatrix};$$

$$\left| c_{2j}^r \right|_{8,4} = \left(\begin{array}{c|ccc} r=1 & r=2 & r=3 & r=0 \\ \hline 14400000 & 16800000 & 6000000 & 6000000 \\ 5400000 & 3600000 & 8100000 & 3600000 \\ 8600000 & 4300000 & 4300000 & 4300000 \\ 12450000 & 16600000 & 4150000 & 4150000 \\ 1250000 & 1250000 & 1250000 & 1250000 \\ 2250000 & 2250000 & 2250000 & 2250000 \\ 8000000 & 8000000 & 28000000 & 8000000 \\ 110000000 & 110000000 & 220000000 & 110000000 \end{array} \right);$$

$$\left| c_{3j}^r \right|_{8,4} = \left(\begin{array}{c|ccc} r=1 & r=2 & r=3 & r=0 \\ \hline 13000000 & 16900000 & 5200000 & 5200000 \\ 10000000 & 6000000 & 8000000 & 3000000 \\ 12900000 & 4300000 & 4300000 & 4300000 \\ 29400000 & 42000000 & 8400000 & 8400000 \\ 3000000 & 3000000 & 3000000 & 2000000 \\ 1500000 & 1500000 & 1500000 & 1500000 \\ 20000000 & 20000000 & 4000000 & 20000000 \\ 110000000 & 110000000 & 220000000 & 110000000 \end{array} \right);$$

Объем производства продукции (в тоннах) агрофирмы по r -ой

деятельности за год

$$q_{1j=1,8}^{r=\overline{1,3}} = \left(\begin{array}{c|ccc} r=1 & r=2 & r=3 & r=0 \\ \hline 1440 & 1440 & 540 & 540 \\ 1800 & 3150 & 1800 & 900 \\ 750 & 150 & 150 & 150 \\ 1300 & 650 & 650 & 650 \\ 3750 & 3750 & 3750 & 3750 \\ 3000 & 3000 & 3000 & 3000 \\ 1200 & 1200 & 2000 & 1200 \\ 300 & 300 & 600 & 300 \end{array} \right); q_{2j=1,8}^{r=\overline{1,3}} = \left(\begin{array}{c|ccc} r=1 & r=2 & r=3 & r=0 \\ \hline 2400 & 2800 & 1000 & 1000 \\ 2700 & 1800 & 4050 & 1800 \\ 600 & 300 & 300 & 300 \\ 2100 & 2800 & 700 & 700 \\ 1250 & 1250 & 1250 & 1250 \\ 4500 & 4500 & 4500 & 4500 \\ 800 & 800 & 2800 & 800 \\ 600 & 600 & 1200 & 600 \end{array} \right);$$

$$q_{3,j=1,8}^{r=\overline{1,3}} = \left(\begin{array}{ccc|c} r=1 & r=2 & r=3 & r=0 \\ 3000 & 3900 & 1200 & 1200 \\ 6000 & 3600 & 4800 & 1800 \\ 1350 & 450 & 450 & 450 \\ 7700 & 11000 & 2200 & 2200 \\ 2000 & 2000 & 2000 & 2000 \\ 2500 & 2500 & 2500 & 2500 \\ 2400 & 2400 & 4800 & 2400 \\ 600 & 600 & 1200 & 600 \end{array} \right).$$

Объем собственного потребления и расходы продукции на внутренние нужды агрофирмы по r -ой деятельности

$$\left| a_{1j}^r \right|_{8,4} = \left(\begin{array}{ccc|c} r=1 & r=2 & r=3 & r=0 \\ 180 & 180 & 180 & 180 \\ 900 & 900 & 900 & 900 \\ 60 & 60 & 60 & 60 \\ 325 & 325 & 325 & 325 \\ 1250 & 1250 & 1250 & 1250 \\ 1500 & 1500 & 1500 & 1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \left| a_{2j}^r \right|_{8,4} = \left(\begin{array}{ccc|c} r=1 & r=2 & r=3 & r=0 \\ 400 & 400 & 400 & 400 \\ 900 & 900 & 900 & 900 \\ 150 & 150 & 150 & 150 \\ 700 & 700 & 700 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

$$\left| a_{3j}^r \right|_{8,4} = \left(\begin{array}{ccc|c} r=1 & r=2 & r=3 & r=0 \\ 600 & 600 & 600 & 600 \\ 1800 & 1800 & 3000 & 1800 \\ 225 & 225 & 225 & 225 \\ 1100 & 1100 & 1100 & 1100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Цена реализации продукции агрофирмы $\left(\frac{\text{сом}}{\text{тонна}} \right)$.

$$\left| \lambda_{ij} \right|_{3,8} = \left(\begin{array}{cccccccc} 14000 & 5000 & 10000 & 10000 & 30000 & 12000 & 20000 & 250000 \\ 14000 & 5000 & 10000 & 10000 & 30000 & 12000 & 20000 & 250000 \\ 14000 & 5000 & 10000 & 10000 & 30000 & 12000 & 20000 & 250000 \end{array} \right).$$

Запишем известные данные:

- объем спроса в регионе на каждый вид продукции, $b_j, j = 1, 2, \dots, 8$. (в тоннах)

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_8) = (2400, 2000, 400, 2000, 2000, 2000, 2500, 1200);$$

-объем потребности в инвестиционном вложении агрофирм в

зависимости от варианта деятельности $|k_i^r|_{3,4}$, (в сомах)

$$|k_i^r|_{3,4} = \begin{pmatrix} r=1 & r=2 & r=3 & r=0 \\ 5000000 & 10000000 & 20000000 & 0 \\ 7000000 & 7000000 & 25000000 & 0 \\ 10000000 & 8000000 & 25000000 & 0 \end{pmatrix};$$

-объем инвестиций, выделенный государством в данный регион

$$G_1 = 70000000 \text{ сомов.}$$

Далее, вычислим матрицу $|(q_{ij}^r - a_{ij}^r)|, i=1,2,3, j=1,2,\dots,8, r=1,2,3,0$, получим

$$|(q_{1j}^r - a_{1j}^r)|_{8,4} = \begin{pmatrix} 1260 & 1260 & 360 & 360 \\ 900 & 2250 & 900 & 0 \\ 690 & 90 & 90 & 90 \\ 975 & 325 & 325 & 325 \\ 2500 & 2500 & 2500 & 2500 \\ 1500 & 1500 & 1500 & 1500 \\ 1200 & 1200 & 1200 & 1200 \\ 300 & 300 & 600 & 300 \end{pmatrix};$$

$$|(q_{2j}^r - a_{2j}^r)|_{8,4} = \begin{pmatrix} 2000 & 2400 & 600 & 600 \\ 1800 & 900 & 3150 & 900 \\ 400 & 150 & 150 & 150 \\ 1400 & 2100 & 0 & 0 \\ 1250 & 1250 & 1200 & 1250 \\ 800 & 800 & 2800 & 800 \\ 600 & 600 & 1200 & 600 \\ 300 & 300 & 600 & 300 \end{pmatrix}; |(q_{3j}^r - a_{3j}^r)|_{8,4} = \begin{pmatrix} 2400 & 3300 & 600 & 600 \\ 4200 & 1800 & 1800 & 0 \\ 1125 & 225 & 225 & 225 \\ 6600 & 9900 & 1100 & 1100 \\ 2000 & 2000 & 2000 & 2000 \\ 2500 & 2500 & 2500 & 2500 \\ 2400 & 2400 & 4800 & 2400 \\ 600 & 600 & 1200 & 600 \end{pmatrix}.$$

Суммарные производственные затраты агрофирмы по каждому виду

деятельности

$$c_i^r, i=1,2,3, r=1,2,3,0,$$

$$\overline{c_1^r} = \sum_{j=1}^8 c_{1j}^r = \begin{pmatrix} r=1 & r=2 & r=3 & r=0 \\ 106932500 & 96942500 & 150597500 & 85667500 \end{pmatrix},$$

$$\overline{c_2^r} = \sum_{j=1}^8 c_{2j}^r = (162350000 \quad 162800000 \quad 274050000 \quad 139550000),$$

$$\overline{c_3^r} = \sum_{j=1}^8 c_{3j}^r = (199800000 \quad 203700000 \quad 290400000 \quad 154400000).$$

Плата агрофирмы инвестиционного вложения (в год) по каждому виду деятельности

$$|PK_i^r|_{3,4} = \begin{pmatrix} 500000 & 1000000 & 2000000 & 0 \\ 700000 & 700000 & 2500000 & 0 \\ 1000000 & 800000 & 2500000 & 0 \end{pmatrix};$$

Вычислим затраты агрофирмы на каждой деятельности по формуле

$c_i^r = \overline{c_i^r} + PK_i^r, i=1,2,3, r=1,2,3,0$, получим

$$|c_i^r|_{3,4} = \begin{pmatrix} 107432500 & 97942500 & 152597500 & 85667500 \\ 163050000 & 163500000 & 276550000 & 139550000 \\ 200800000 & 204500000 & 292900000 & 154400000 \end{pmatrix}.$$

В соответствии (1)-(6) сформулируем числовую модель задачи.

Найти максимум

$$\begin{aligned} P(x, y) = & (14000x_{11} + 5000x_{12} + 10000x_{13} + 10000x_{14} + 30000x_{15} + 12000x_{16} + 20000x_{17} + 250000x_{18} + \\ & + 14000x_{21} + 5000x_{22} + 10000x_{23} + 10000x_{24} + 30000x_{25} + 12000x_{26} + 20000x_{27} + 250000x_{28} + \\ & + 14000x_{31} + 5000x_{32} + 10000x_{33} + 10000x_{34} + 30000x_{35} + 12000x_{36} + 20000x_{37} + 250000x_{38}) - \\ & - (107432500y_1^1 + 97942500y_1^2 + 152597500y_1^3 + 85667500y_1^0 + \\ & + 163050000y_2^1 + 163500000y_2^2 + 276550000y_2^3 + 139550000y_2^0 + \\ & + 200800000y_3^1 + 204500000y_3^2 + 292900000y_3^3 + 154400000y_3^0) \end{aligned} \quad (7)$$

при условиях

$$\begin{aligned} 1260y_1^1 + 1260y_1^2 + 360y_1^3 + 360y_1^0 &= x_{11}, \\ 900y_1^1 + 2250y_1^2 + 900y_1^3 + 0y_1^0 &= x_{12}, \\ 690y_1^1 + 90y_1^2 + 90y_1^3 + 90y_1^0 &= x_{13}, \\ 975y_1^1 + 325y_1^2 + 325y_1^3 + 325y_1^0 &= x_{14}, \\ 2500y_1^1 + 2500y_1^2 + 2500y_1^3 + 2500y_1^0 &= x_{15}, \\ 1500y_1^1 + 1500y_1^2 + 1500y_1^3 + 1500y_1^0 &= x_{16}, \\ 1200y_1^1 + 1200y_1^2 + 2000y_1^3 + 1200y_1^0 &= x_{17}, \\ 300y_1^1 + 300y_1^2 + 600y_1^3 + 300y_1^0 &= x_{18}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
2000y_2^1 + 2400y_2^2 + 600y_2^3 + 600y_2^0 &= x_{21}, \\
1800y_2^1 + 900y_2^2 + 3150y_2^3 + 900y_2^0 &= x_{22}, \\
400y_2^1 + 150y_2^2 + 150y_2^3 + 150y_2^0 &= x_{23}, \\
1400y_2^1 + 2100y_2^2 + 0y_2^3 + 0y_2^0 &= x_{24}, \\
1250y_2^1 + 1250y_2^2 + 1200y_2^3 + 1250y_2^0 &= x_{25}, \\
4500y_2^1 + 4500y_2^2 + 4500y_2^3 + 4500y_2^0 &= x_{26}, \\
800y_2^1 + 800y_2^2 + 2800y_2^3 + 800y_2^0 &= x_{27}, \\
600y_2^1 + 600y_2^2 + 1200y_2^3 + 600y_2^0 &= x_{28},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
2400y_3^1 + 3300y_3^2 + 600y_3^3 + 600y_3^0 &= x_{31}, \\
4200y_3^1 + 1800y_3^2 + 1800y_3^3 + 0y_3^0 &= x_{32}, \\
1125y_3^1 + 225y_3^2 + 225y_3^3 + 225y_3^0 &= x_{33}, \\
6600y_3^1 + 9900y_3^2 + 1100y_3^3 + 1100y_3^0 &= x_{34}, \\
2000y_3^1 + 2000y_3^2 + 2000y_3^3 + 2000y_3^0 &= x_{35}, \\
2500y_3^1 + 2500y_3^2 + 2500y_3^3 + 2500y_3^0 &= x_{36}, \\
2400y_3^1 + 2400y_3^2 + 4800y_3^3 + 2400y_3^0 &= x_{37}, \\
600y_3^1 + 600y_3^2 + 1200y_3^3 + 600y_3^0 &= x_{38},
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
50000000y_1^1 + 100000000y_1^2 + 200000000y_1^3 + 0y_1^0 + 70000000y_2^1 + 70000000y_2^2 + \\
250000000y_2^3 + 0y_2^0 + 100000000y_3^1 + 80000000y_3^2 + 250000000y_3^3 + 0y_3^0 \leq 700000000,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 x_{i1} \geq 2400, \sum_{i=1}^3 x_{i2} \geq 2000, \sum_{i=1}^3 x_{i3} \geq 400, \sum_{i=1}^3 x_{i4} \geq 2000, \\
\sum_{i=1}^3 x_{i5} \geq 2000, \sum_{i=1}^3 x_{i6} \geq 2000, \sum_{i=1}^3 x_{i7} \geq 2500, \sum_{i=1}^3 x_{i8} \geq 1200,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\sum_{r=1}^4 y_i^r = 1, i = 1, 2, 3, \tag{13}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, \dots, 8, \tag{14}$$

где $x = \{x_{ij} : i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, \dots, 8\}$ $y = \{y_i^r : i = 1, 2, 3, r = 1, 2, 3, 4\}$.

Решим задачу с помощью электронной таблицы [3] Microsoft Excel

получим оптимальный план выбора варианта деятельности каждой агрофирмы

и соответствующие объемы производства $y = \{y_1^3 = 1, y_2^3 = 1, y_3^2 = 1\}$;

$$x = \left\{ \begin{aligned} &x_{11} = 360, x_{12} = 900, x_{13} = 90, x_{14} = 325, x_{15} = 2500, x_{16} = 1500, x_{17} = 2000, x_{18} = 600, \\ &x_{21} = 600, x_{22} = 3150, x_{23} = 150, x_{24} = 0, x_{25} = 1200, x_{26} = 4500, x_{27} = 2800, x_{28} = 1200, \\ &x_{31} = 3300, x_{32} = 225, x_{33} = 225, x_{34} = 9900, x_{35} = 2000, x_{36} = 2500, x_{37} = 2400, x_{38} = 600 \end{aligned} \right\};$$

а также план распределения инвестиционного вложения: первой агрофирме выделено $k_1^3 = 20000000$ сомов она соответствует третьему виду деятельности, второй агрофирме $k_2^3 = 25000000$ сомов также соответствует третьему виду деятельности, а третьей агрофирме $k_3^2 = 8000000$ сомов она соответствует второму виду деятельности. Из $G_1 = 70000000$ сомов инвестиции были использованы всего 53000000 сомов. При предлагаемом плане, распределения инвестиции произведены по региону продукции для реализации на рынок сбыта по растениеводству: зерновые 4260т, многолетние травы 5850т; по овощеводству: 465т, картофель 10225т; по садоводству: виноград 5700т, яблоки 8700 т; по животноводству: молоко 7200т, мясо 2400т., а прибыль от реализации продукции агрофирм региона составило $L(x, y) = 579000000$ сомов.

Список использованных источников

- 1.Смит А. Исследование о природе и причинах богатства народов.- Москва: Соцэкиз, 1962.
- 2.Эшенкулов П., Жусупбаев А., Култаев Т. Методика решения задачи линейного программирования на компьютере //- Ош: Ош ГУ, 2004.- 60 с.
3. Эшенкулов П., Жусупбаев А. EXCEL в примерах и задачах//- Бишкек, 2007.- 168с.

MSC 15 B99

ПОСТРОЕНИИ M МАТРИЦ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Байзаков А.Б., Момбеков А.Дж., Шаршенбеков М.М.

Институт математики НАН КР

Симметрияны сактаган квадраттык матрицалардын кээ бир касиеттерин табылган. Атап айтканда, блокуу квадраттык матрицаларда симметрияны сактоо принциби табылды жана мындай симметриялык матрицалардын жогору тартиптегилерин тургузуу ыкмасы алынды. Мында, арифметикалык прогрессиянын кээ бир касиеттери колдонулат.

Урунттуу сөздөр: сыйкырдуу квадрат, блокуу квадраттык матрицалар, квадраттын константасы, арифметикалык прогрессия.

Найдены некоторые свойства квадратных матриц, сохраняющих симметрию. В частности, выявлен принцип сохранения симметрии в блочных матрицах, который дает метод построения, таких же симметричных матриц все более высокого порядка. При этом используется некоторые свойства арифметической прогрессии.

Ключевые слова: Магический квадрат, квадратные блочные матрицы, константа квадрата, арифметическая прогрессия.

Some properties of square matrices preserving symmetry are found. In particular, the principle of conservation of symmetry in block matrices is revealed, which gives a method for constructing the same symmetric matrices of an increasingly high order. Some properties of the arithmetic progression are used.

Keywords: Magic Squares, square block matrices, square constant, arithmetic progression.

Постановка задачи. Метод декомпозиции широко применяется в науке и практике. Он приводит к достижению цели, если целью удастся расчленить на независимые друг от друга части, поскольку в этом случае их отдельное рассмотрение позволяет правильное представление об их вкладе в общий эффект. Французский математик Р. Декарт писал: «Расчлените каждую изучаемую вами задачу на столько частей, сколько потребуется, чтобы их было легко решить».

Наша цель построить M матрицу высокого порядка, например, матрицу 20 го порядка применяя вышеуказанный метод, т.е. разместить натуральные числа от 1 до 400 ($20^2 = 400$) в M матрицу 20 порядка, так, чтобы S константа квадрата (магическое число) был 4010:

$$S = \frac{n^2 + 1}{2} \cdot n = \frac{20^2 + 1}{2} \cdot 20 = 4010.$$

Будем использовать обозначение: N - множество натуральных чисел; R - множество действительных чисел; C - комплексное поле.

Определение 1. Квадратная матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ называется M матрицей, если $a_{ij} \in N$, $i, j = \overline{1, n}$ причем выполнены следующие условия:

1) Все n^2 числа $a_{ij} \in N$, $i, j = \overline{1, n}$ различны и являются элементом подмножества $N_m \subset N$, последовательно расположенных n^2 чисел от $m+1$, до $m+n^2$ в множестве N ;

$$2) \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = S, \quad \forall j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = S, \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = S, \quad \sum_{i+j=n+1} a_{ij} = S.$$

Определение 2. Матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ называется M_1 матрицей, если $a_{ij} \in R, i, j = \overline{1, n}$, причем выполнены следующие условия:

1) Все n^2 числа $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$ различны и является элементом подмножества $R_m \in R$ (множество действительных чисел);

$$\text{а. } \sum_{i=1}^n a_{ij} = S, \sum_{i+j=n+1} a_{ij} = S.$$

Будем исходить из того, что M матрицы 3 и 4го порядка нами построены, например,

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ (a)} \quad \begin{pmatrix} 13 & 2 & 12 & 7 \\ 16 & 3 & 9 & 6 \\ 1 & 14 & 8 & 11 \\ 4 & 15 & 5 & 10 \end{pmatrix}. \text{ (б)} \quad (1)$$

Можно будет использовать и другие виды M матриц 3 и 4 го порядка. Как известно, количество M матриц 3го порядка - 8, а M -матриц 4го порядка -880, а M -матриц 5го порядка - более 1 000 000.

Построение M матриц высокого порядка. При построении M матриц высокого порядка будет использовать M матрицу низкого порядка и свойства арифметической прогрессии констант квадрата.

Покажем применение метода декомпозиции для построения M матриц 20го порядка. В этом случае будем исходить из того, что M матрица 4 и 5го порядков нами построены. У авторов имеется несколько альбомов таких M матриц.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \text{ (a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 20 & 14 & 23 \\ 15 & 24 & 3 & 6 & 17 \\ 8 & 16 & 12 & 25 & 4 \\ 22 & 5 & 9 & 18 & 11 \\ 19 & 13 & 21 & 2 & 10 \end{pmatrix} \text{ (б)} \quad (2)$$

Можно использовать и другие виды M матриц 4 и 5го порядков.

Определим дерево целей в виде

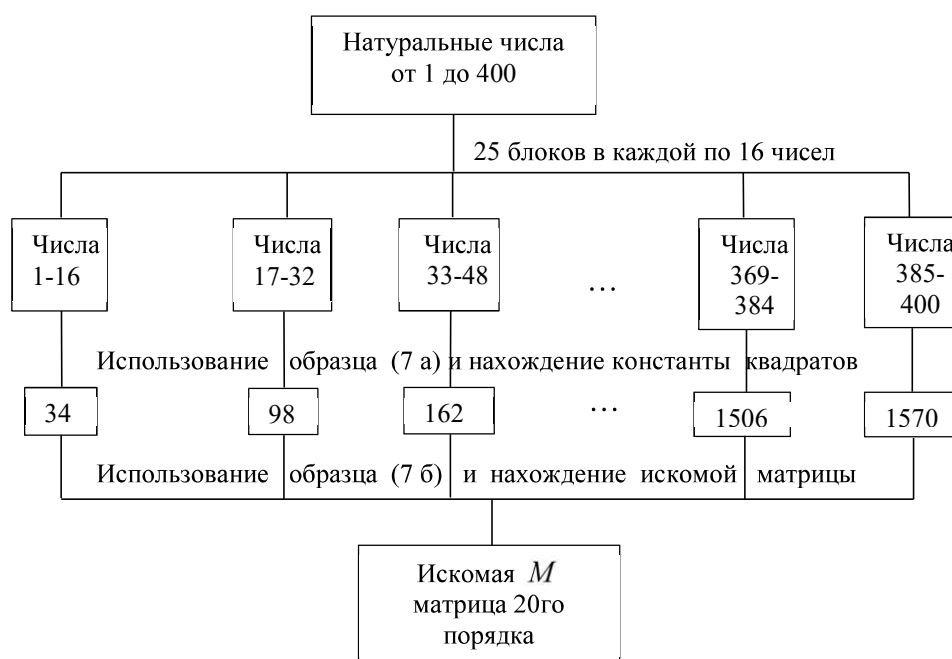


Рис. 1.

Как и в примере 1 в силу теоремы 3, расположив каждый блок в частности, по образцу (7 а) определим 25 констант квадратов в виде 34, 98, 162, ... , 1506, 1570 (рис. 1).

Ясно, что они образуют арифметическую прогрессию с $a_1 = 34$, $d = 64$. В силу теоремы 2 их них образуем M матрицу по образцу (7 б). Теперь в силу определения 1 констант квадратов (магичности) каждую константу квадратов можно рассматривать как блок 5го порядка M матриц. Выписав в место каждой константы квадрата свои соответствующие блоки, получим искомую M матрицу 20го порядка (см. Приложение, рис. 2).

Так же отметим, что множество значений констант квадратов моделируется разностным уравнением второго порядка вида

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 1 \quad (3)$$

с начальными условиями

$$u_1 = 34, \quad u_2 = 98; \quad (4)$$

Согласно методу Эйлера общее решение уравнения (2) имеет вид

$$u(n) = c_1 + c_2 n$$

так как корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ совпадают.

Тогда, решение задачи Коши (2), (3), имеет вид

$$u(n) = -30 + 64n. \quad (5)$$

В силу (4) получаем значения констант квадратов последовательности (2)

$$u(1) = 34, u(2) = 98, \dots, u(24) = 1506, u(25) = 1570.$$

Топологическая структура и свойства M матриц. Пусть нами построена M матрица n -го порядка A . Для ясности в дальнейшем матрицу A представим в виде магического квадрата и обозначим опять через A .

Произведем гомеоморфное отображение [4] $f: A \rightarrow B$, где B кольцо и верхняя сторона квадрата взаимно однозначно и непрерывно отображается в границу окружность внешнего круга, а нижняя сторона квадрата отображается в окружность внутреннего круга. Ясно, что при этом строки M матрицы однозначно и непрерывно преобразуется в параллели, а столбцы в меридианы. И поэтому константа квадрата сохраняется для каждой параллели, и для каждой меридианы. Далее, в этом случае обнаруживается новое свойство кольца. В кольце появляются спирали, для которых так же сохраняется константа квадрата. Причем половина из них вращаются по часовой стрелке, остальные против часовой стрелке (см. рис. 8). Эти дополнительные сверх свойства M матриц можно обнаружить следующим образом. Если к нему приставить справа такую же M матрицу, то при суммировании по всем диагональным направлениям получаем константу квадрата, а их оказывается всего 4 два из них сверху вниз, и 2 снизу вверх.

$$\begin{array}{c}
 \searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\
 \left(\begin{array}{cccc|cccc} 13 & 2 & 12 & 7 & 13 & 2 & 12 & 7 \\ 16 & 3 & 9 & 6 & 16 & 3 & 9 & 6 \\ 1 & 14 & 8 & 11 & 1 & 14 & 8 & 11 \\ 4 & 15 & 5 & 10 & 4 & 15 & 5 & 10 \end{array} \right) \\
 \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow
 \end{array}$$

Проверим для M матриц 5го порядка.

$$\begin{array}{c}
 \searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\
 \left(\begin{array}{ccccc} 16 & 5 & 14 & 23 & 7 \\ 24 & 8 & 17 & 1 & 15 \\ 2 & 11 & 25 & 9 & 18 \\ 10 & 19 & 3 & 12 & 21 \\ 13 & 22 & 6 & 20 & 4 \end{array} \right) \parallel \left(\begin{array}{ccccc} 16 & 5 & 14 & 23 & 7 \\ 24 & 8 & 17 & 1 & 15 \\ 2 & 11 & 25 & 9 & 18 \\ 10 & 19 & 3 & 12 & 21 \\ 13 & 22 & 6 & 20 & 4 \end{array} \right) \\
 \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow
 \end{array}$$

В этом случае число констант квадратов по диагональным направлениям равно $2 \cdot 5 = 10$, 5 из них сверху вниз и 5 снизу вверх.

Очевидно, что при топологическом преобразовании M матриц в кольцо, эти диагональные направления и дают спирали, вращающиеся как по часовой стрелке, так и против часовой стрелке.

Непосредственно проверкой можно убедиться в справедливости следующих свойств

1°. Если A - M матрица, то λA также M матрица, где $\lambda \in R$ (а также C -комплексная плоскость), причем константа квадрата $S_1 M$ матрицы λA определяется по формуле

$$S_1 = \lambda S_A$$

где S_A - константа квадрата M матрицы A .

2°. Если, A является M матрицей, а $D_m = (m)_{ij=1}^n$, постоянная матрица, то $A \pm D_m$ - также будет M -матрицей, причем константа квадрата $S_1 M$ матрицы $A \pm D_m$ определяется по формуле

$$S_1 = S_A \pm mn,$$

где n - порядок матрицы A .

Например, пусть A M матрица (2), а $D = (-5)_{ij=1}^3$, то

$$A - D_{-5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

будет M матрицей с константой квадрата равной $S_1 = 15 - 5 \cdot 3 = 0$.

3°. Если, A является M матрицей, то A^r , $r \geq 2k$ будет симметрической матрицей.

Отметим, что если A является M матрицей, то A^2 будет симметричной матрицей. Тогда в силу [3, стр. 74] все ее четные степени A^r будет симметричной матрицей.

4°. Пусть A является M_1 матрицей с константой квадрата S . Тогда число S является собственным значением M_1 матрицы A , с собственным вектором $\vec{x} = c \cdot colon(1, 1, \dots, 1)$ где c - произвольная константа.

Доказательство. Для определенности будем считать, что $c = 1$; тогда равенство $A\vec{x} = S\vec{x}$ будет выполняться в силу *определения 2* M_1 матрицы. Что требовалось доказать.

Замечание. Свойства 4° остается справедливым и для транспонированной матрицы A^T , т.е. константа квадрата S будет собственным значением одновременно M_1 матрицы A и A^T . Это следует из определения 2.

Так как справедливо взаимно однозначное отображение отрезка $[a, b]$ на отрезок $[0, 1]$ по формуле $x = (b - a)t + a$ и в силу свойству 1° имеется возможность составить M матрицы и числами с отрезка $[0, 1]$.

Известно, что магические квадраты непосредственно используются в информационной безопасности, надеемся, что построенные нами M матрицы будут интересовать специалистов по криптографии.

Список использованных источников

1. Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – Москва: ГИТТЛ. -1959. – 576с.
2. Гантмахер Ф.Т. Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552с.

3. Ланкастер П. Теория матриц. -пер. с англ. – Москва: Наука, 1978. – 280 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1972. – 544 с.
5. Ю. В. Чебраков. Теория магических матриц. Выпуск ТММ-1. – С. – Петербург, 2008
6. Heinz H. Magic Squares, Magic Stars & Other Patterns. – Last updated Nov 2009.

Приложения

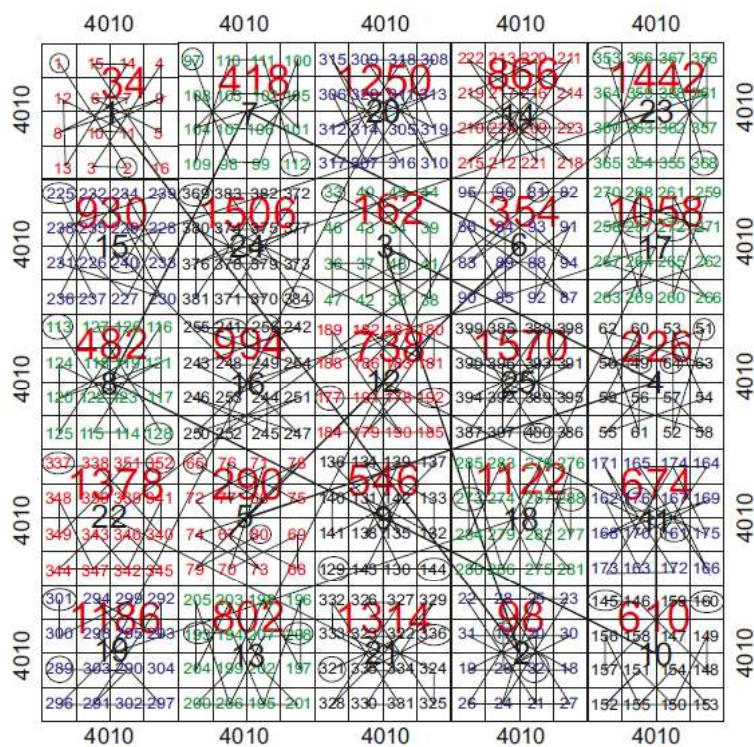


Рис.1.

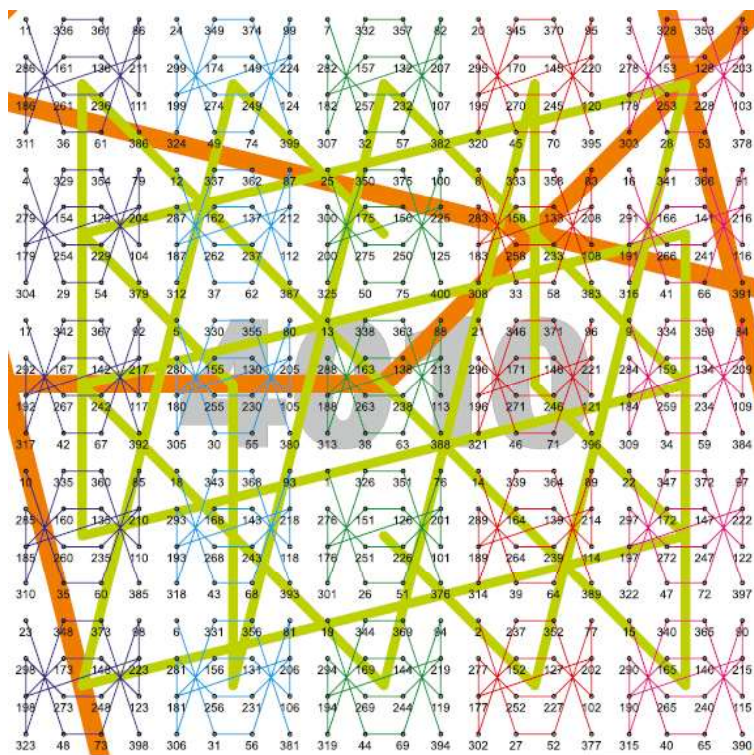


Рис.2.

MSC 45K08

О НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р., Асанкулова А.С.

Институт математики НАН КР, КНУ им. Ж.Баласагына

Бул иште үчүнчү тартипте айрым туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулук проблемасы жана алардын интегралдык көрүнүшү каралган. Баштапкы маселенин сызыктуу эместигинен улам, табылган жетиштүү шарттар, жалпысынан, чечимдерди жалгыздыгына кепилдик бербейт.

Урунттуу сөздөр: айрым туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеме, Коши маселесинин чыгарымдуулук проблемасынын жетиштүү шарттары, кысып чагылдыруулар, экинчи түрдөгү сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдеме, туундусу менен үзгүлтүксүз функциялар мейкиндиги, Коши маселесинин чыгарылышынын интегралдык көрүнүшү.

В данной работе исследована проблема разрешимости задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка и найдено интегральное представление полученных решений. В силу нелинейности начальной задачи, найденные достаточные условия, вообще говоря, не гарантируют единственность полученных решений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, достаточное условие разрешимости задачи, отображение в себя, принцип сжатых

отображений, нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, пространство функций непрерывных со своими производными, интегральное представление решений задачи Коши.

In this paper, we study the problem of solvability of the Cauchy problem for nonlinear third-order partial differential integro-differential equations and find the integral representation of the solutions obtained. By virtue of the nonlinearity of the initial problems, the found sufficient conditions, generally speaking, do not guarantee the uniqueness of the solutions obtained.

Keywords: integro-differential equations in partial derivatives, a sufficient condition for the solvability of the problem, a mapping into itself, the principle of compressed mappings, a non-linear Volterra integral equation of the second kind, a space of functions continuous with its derivatives, an integral representation of solutions of the Cauchy problem.

Рассмотрим уравнение

$$u_{ttx} + 2\alpha u_{tx} + (\alpha^2 + 1)u_x + \beta u = f(t, x, u) + \int_0^t K(t, \tau, x, u(s, x))ds, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$u_t(0, x) = \psi(x), \quad (3)$$

где $\alpha, \beta \in R_+$.

Предположение (A). Пусть

$$f(t, x, u) \in \bar{C}([0, T]) \times R \times R \times R \times R \cap Lip(L_u),$$

$$K(t, \tau, x, u) \in \bar{C}((0 \leq \tau \leq t \leq T]) \times R \times R \times R) \cap Lip(N_u), \quad \frac{T}{\alpha} + \frac{L + NT}{\alpha\beta} < 1.$$

Решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$u(t, x) = c(t, x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x (t-s) e^{-\alpha(t-s) - \beta(x-v)} Q(s, v) dv ds, \quad (4)$$

где $c(t, x)$ - известная функция, такая, что $c(0, x) = \varphi(x)$, $c_t(0, x) = \psi(x)$, $Q(t, x)$ - новая неизвестная функция, подлежащая определению.

Тогда справедлива

Теорема. Пусть выполнено предположение (A). Тогда интегро-дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка (1) с начальными условиями (2)-(3) имеет решение

$$u(t, x) \in \bar{C}^{(2,1)}([0, T_0] \times R),$$

которое имеет интегральное представление в виде (4).

Доказательство. Подставляем (4) в (1). Частная производная из (4) по t дает

$$u_t = c_t + (-\alpha) \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} (t-s) Q(v,s) dv ds + \\ + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} Q(v,s) dv ds. \quad (5)$$

Или, в силу (4)

$$u_t = c_t - \alpha(u - c) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} Q(v,s) dv ds. \quad (6)$$

Частная производная из (4) по x дает

$$u_x = c_x + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} (t-s) Q(v,s) dv ds - \beta(u - c). \quad (7)$$

Далее из (6) находим частную производную по x

$$u_{tx} = c_{tx} - \alpha(u_x - c_x) + (-\beta) \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} Q(v,s) dv ds + \\ + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} Q(v,s) ds. \quad (8)$$

Находим частную производную по t обеих частей (6):

$$u_{tt} = c_{tt} - \alpha(u_t - c_t) + \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)} Q(v,t) dv + (-\alpha) \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} Q(v,s) dv ds$$

или с учетом (4) имеем

$$u_{tt} = c_{tt} - \alpha(u_t - c_t) + \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)} Q(v,t) dv + \\ + (-\alpha) \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} Q(v,s) dv ds. \quad (9)$$

Дифференцируя обе части соотношения (9) по x имеем

$$u_{tx} = c_{tx} - \alpha(u_{tx} - c_{tx}) + Q(t,x) + \\ + \alpha\beta \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} Q(s,v) dv ds + (-\alpha) \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} Q(s,x) ds. \quad (10)$$

Предварительно умножив уравнение (8) на 2α , сложив почленно с (10) имеем

$$\begin{aligned}
& c_{tx} + Q(t, x) + \alpha\beta \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} Q(s, v) dv ds + (-\alpha) \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} Q(s, x) ds - \alpha(u_{tx} - c_{tx}) + \\
& \alpha u_x + \alpha \left[c_{tx} - \alpha(u_x - c_x) + (-\beta) \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} Q(v, s) dv ds + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} Q(v, s) ds \right] = \quad (11) \\
& = c_{tx} + Q(t, x) - \alpha^2(u_x - c_x).
\end{aligned}$$

Учитывая (7), (4) имеем

$$\begin{aligned}
& (\alpha^2 + 1)u_x + \beta u = \alpha^2 u_x + \left[c_x + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} (t-s) Q(v, s) dv ds - \beta(u - c) \right] + \beta u = \\
& = c_x + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} (t-s) Q(v, s) dv. \quad (12)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$H(t, x) = c_{tx} + 2\alpha c_{tx} + (\alpha^2 + 1)c_x + \beta c. \quad (13)$$

Тогда из (1), с учетом (4), (11)-(13) получим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра II рода

$$Q(t, x) = f[t, x, \bullet] + \int_0^t K(t, \tau, x, \bullet) dv - H(t, x) \equiv P[Q], \quad (14)$$

где символ

(•) обозначает правую часть (4).

Нелинейное интегральное уравнение Вольтерра II рода (14) будем решать принципом сжатых отображений. Пусть

$$Q = \left\{ Q(t, x) : Q(t, x) \in \bar{C}([0, T_0] \times R) \cap \|Q(t, x)\| < h \right\},$$

где величины T_0 , h будут определены позже.

Если значения величин T_0 , h определим

$$\|P[Q]\| = \left\| f[t, x, \bullet] + \int_0^t K(t, \tau, x, \bullet) dv - H(t, x) \right\| \leq h,$$

Q с помощью оператора $P[Q]$ отображается в себя. то $P[Q]: Q \rightarrow Q$. Итак, множество

Оценим разность

$$\begin{aligned}
& \|P[Q_1] - P[Q_2]\| \leq \left\| f\left(t, x, c + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}(t-s)Q_1(v, s)dvds\right) - \right. \\
& \left. - f\left(t, x, c + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}(t-s)Q_2(v, s)dvds\right) \right\| + \\
& \left\| \int_0^t K\left(t, \tau, x, c + \int_0^\tau \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}(t-s)Q_1(v, s)dvds\right) - \right. \\
& \left. - \int_0^t K\left(t, \tau, x, c + \int_0^\tau \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}(t-s)Q_2(v, s)dvds\right) \right\| \leq \\
& \leq \left(\frac{T}{\alpha} + \frac{L + NT}{\alpha\beta}\right) \|Q_1(t, x) - Q_2(t, x)\|.
\end{aligned}$$

Тогда в силу предположения (A) и по принципу сжатых отображений нелинейное интегральное уравнение Вольтерра II рода (14) при всех $(t, x) \in \{[0, T_0] \times R\}$ имеет единственное решение $Q(t, x) \in Q$.

Далее, докажем ограниченность решений задачи Коши (1)-(3). Из (4) имеем неравенство

$$\|u(t, x)\| \leq \|c(t, x)\| + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|(t-s)\| \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)} dvds \leq C_0 + \frac{L}{\alpha\beta} = M_1 = const.$$

Из (5) имеем

$$\begin{aligned}
\|u_t\| & \leq \|c_t\| + \left\| (-\alpha) \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}(t-s)Q(v, s)dvds \right\| + \\
& + \left\| \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(v, s)dvds \right\| \leq M_2 = const.
\end{aligned}$$

Из (8) имеем

$$\begin{aligned}
\|u_{tx}\| & \leq \|c_{tx}\| + \alpha \|u_t - c_t\| + \left\| (-\beta) \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(v, s)dvds \right\| + \\
& + \left\| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(v, s)ds \right\| \leq M_3 = const.
\end{aligned}$$

Аналогично, из (8) имеем

$$\begin{aligned}
\|u_{tt}\| & \leq \|c_{tt}\| + \alpha \|u_t - c_t\| + \left\| \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)}Q(v, t)dv \right\| + \\
& + \left\| (-\alpha) \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(v, s)dvds \right\| + \|u - c\| \leq M_4 = const.
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \|u_{tx}\| &\leq \|c_{tx}\| + \alpha \|u_{tx} - c_{tx}\| + \|Q(t, x)\| + \\ &+ \alpha \beta \left\| \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} Q(s, v) dv ds + (-\alpha) \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \cos(t-s) Q(s, x) ds \right\| \leq \\ M_5 &= const. \end{aligned}$$

Список использованных источников

1. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Глав.изд. М-ва культуры Кирг ССР, 1957. – 328с.
2. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б., Айтбаев К.А. О разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Тр. IV Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию акад. М.Иманалиева. Вестн. Кырг. Нац. ун-та им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2011. – Спец. вып. – С. 15-18.
3. Айтбаев К.А. Разрешимость и структура решений нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2016. – 18 с.

MSC 18C05

ЭЛЕМЕНТЫ КАТЕГОРИИ УРАВНЕНИЙ

Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж. К., Маматжан уулу Э.

Институт математики НАН КР, КНУ им. Ж.Баласагына

Математиканын ар түрдүү бөлүктөрүндө «тендеме» түшүнүгү пайда болот. Макаланын максаты: ал түшүнүктөрдү «предикат» түшүнүгүнүн жардамы менен биргелештирип, белгилүү категориялардын негизинде тендемелер категориясынын элементтерин тургузуу. Макалада жаңы жалпы тендеме түшүнүгү киргизилген жана тендемелер категориясынын элементтери, анын объектилери жана морфизмдери менен жана анын ар кандай тендемелер үчүн белгилүү типтеги маселелерди, ошондой эле жаңы типтеги математикалык маселелерди кармаган камтылган категориясы тургузулган.

Урунттуу сөздөр: категория, морфизм, тендеме, предикат, чыгарылыш

В различных разделах математики возникает понятие “уравнение”. Цель статьи: с помощью понятия “предикат” объединить эти понятия и построить элементы категории уравнений на основе известных категорий. В статье введено новое общее понятие уравнения

и построены элементы категории уравнений, с ее объектами и морфизмами и ее подкатегорий, включающие в себя как известные типы задач для различных уравнений, так и новые типы математических задач.

Ключевые слова: категория, морфизм, уравнение, предикат, решение

The notion of equation arises in various branches of mathematics. The aim of the paper is to unite these notions with the assistance of notion of predicate and construct elements of the category of equations on the base of well-known categories. A new general notion of equation is introduced and elements of the category of equations with its objects and morphisms and its subcategories including known types of tasks for various equations as well as new types of mathematical tasks are constructed in the paper.

Keywords: category, morphism, equation, predicate, solution

1. Введение. В настоящее время многие разделы математики успешно изучаются в рамках теории категорий, поскольку она рассматривает свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов. В Кыргызстане первые результаты по категорной алгебре получил М.Я.Медведев [1], ряд результатов по категорной топологии был получен академиком А.А.Борубаевым, А.А.Чекеевым и их учениками, см. [2].

В различных разделах математики возникает понятие «уравнение». Но раньше были построены только категории отдельных видов уравнений, см. например [3]. Вместе с тем, известен и используется в математике для доказательств тот факт, что уравнения и системы уравнений различных типов эквивалентны. Более того, известный прием понижения порядка автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, различные методы подстановок и преобразований аргумента, развиваемый в Кыргызстане метод преобразования решений, созданный в Кыргызстане метод дополнительного аргумента и др. показывают, что эквивалентными могут быть уравнения с различными решениями, и даже в различных пространствах. Поэтому целью настоящей работы является расширение понятия «уравнение» с включением понятий «система уравнений», «уравнение с дополнительными условиями» для строгого и единообразного описания упомянутых методов и формулировка основных понятий, объектов и морфизмов категории уравнений и ее подкатегорий, установление ее связей с другими категориями.

Приведем известные сведения из теории категорий

О п р е д е л е н и е 1.1. Категория K задаётся

1) Совокупностью объектов $Ob(K)$ (будем обозначать их буквами A, B, C);

2) Совокупностью морфизмов $Mor(K)$ (будем обозначать их буквами $f, g, h, \dots$);

3) Операциями dom и cod , которые сопоставляют каждому морфизму f некоторые объекты $dom(f)$ и $cod(f)$ (они называются началом и концом f). Тот факт, что $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, изображается так $f : A \rightarrow B$. В этом случае говорят, что f – морфизм из A в B .

4) Операцией композиции, которая по каждой паре морфизмов f и g , таких, что $cod(f) = dom(g)$, выдаёт некоторый морфизм $g \circ f : A \rightarrow C$ (она называется композицией g и f).

5) Операцией I , которая по каждому объекту A выдаёт некоторый морфизм $I_A : A \rightarrow A$ (он называется тождественным или единичным морфизмом объекта A).

Совокупность всех морфизмов из A в B в категории K обозначается $K(A, B)$.

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции. Для любой тройки морфизмов $f, g, h, f : A \rightarrow B; g : B \rightarrow C; h : C \rightarrow D$ выполнено равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. Свойства тождества. Для любого морфизма $f : A \rightarrow B$ выполнены равенства $f \circ I_A = f, I_B \circ f = f$.

П р и м е ч а н и е. С теоретико-множественной точки зрения совокупность всех множеств не является множеством - это приводит к противоречиям. Условно говорится, что «она слишком велика». То же относится и к совокупности преобразований множеств и другим совокупностям в различных разделах математики.

О п р е д е л е н и е 1.2. Категория K называется локально малой, если $K(A, B)$ является множеством для любых A и B .

О п р е д е л е н и е 1.3. Категория K называется малой, если $Mor(K)$ (то есть, объединение всех $K(A, B)$) является множеством.

О п р е д е л е н и е 1.4. Морфизм $f : A \rightarrow B$ называется изоморфизмом, если существует морфизм $g : B \rightarrow A$ со свойствами $g \circ f = I_A$, $f \circ g = I_B$. Такой морфизм g называется обратным к f .

О п р е д е л е н и е 1.5. Объекты A и B называются изоморфными, если между ними есть изоморфизм. Это обозначается $A \sim B$ (транзитивное отношение).

Основными категориями, из которых строятся все остальные, являются следующие:

Категория множеств Set . $Ob(Set)$ - непустые множества, $Mor(Set)$ – функции, отображающие одни множества в другие.

Категория функций (операторов, преобразований, отображений). Она упоминается в литературе, но для нее не введено обозначения, и мы не нашли ее формального описания. Мы предлагаем $Func$. $Ob(Func) = Mor(Set)$, $Mor(Func)$ – преобразования функций. В свою очередь, подкатегории этой категории используются в различных разделах математики.

Категория топологических пространств Top . $Ob(Top)$ - топологические пространства, $Mor(Top)$ - непрерывные отображения.

Понятия из этой категории используются, в том числе, для определения корректности задач, в том числе в категории уравнений, которую мы предлагаем в настоящей работе, и ее подкатегории - интегральных уравнений.

Изучение топологических пространств с использованием методов теории категорий известно, как категорная топология.

Категория равномерных пространств $Unif$. $Ob(Unif)$ - равномерные пространства, $Mor(Unif)$ - равномерно непрерывные отображения.

2. Определение категории уравнений и ее подкатегорий. В различных разделах теории динамических систем рассматриваются дифференциальные, интегральные, разностные, а также интегро-дифференциальные и другие типы уравнений, с начальными, краевыми, нелокальными условиями и другой дополнительной информацией, в различных функциональных пространствах. Для единообразного представления таких задач, а также для более

систематического применения и обобщения известных методов предлагается применить подход теории категорий.

Категорию уравнений будем обозначать *Equa*.

О п р е д е л е н и е 2.1. $Ob(Equa)$ - наборы $\{ \text{непустые множества } X, Y, \text{ предикат } P(x) \text{ на } X, \text{ преобразование } B: X \rightarrow Y \}$.

Решением уравнения $\{X, Y, P, B\}$ будем называть такое $y \in Y$, что $(\exists x \in X)(P(x) \wedge (y = B(x)))$.

В частности, если B - тождественное отображение, то получаем только задачу решения уравнения " $P(x)$ ".

$Mor(Equa)$ - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$, что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Примеры морфизмов:

П р и м е р 2.1. Преобразование исходного множества. Множество X заменяется на множество X_I такое, что $\{x \in X: P(x)\} = \{x \in X_I: P(x)\}$.

П р и м е р 2.2. Преобразование решения. Вводится биективная функция $\varphi: X \rightarrow X$. Задача $\{X, Y, P, B\}$ преобразуется к решению уравнения " $P(\varphi(z)), z \in X$ " и вычислению $y = B(\varphi(z))$.

П р и м е р 2.3. Преобразование уравнения. Вводится такой предикат P_I , что либо $\{x \in X: P(x)\} = \{x \in X: P_I(x)\}$, либо (более общий, но более сложный метод) $\{x \in X: P(x)\} \subset \{x \in X: P_I(x)\}$. В последнем случае должна быть изменено преобразование B так, чтобы отбрасывать решения из $\{x \in X: P_I(x)\} \setminus \{x \in X: P(x)\}$.

Подкатегории категории *Equa*.

Категория уравнений для функций *Equa-Func*.

О п р е д е л е н и е 2.2. $Ob(Equa-Func)$ - наборы $\{ X \in Ob(Func), Y \in Ob(Func), \text{ предикат } P(x) \text{ на } X, \text{ преобразование } B: X \rightarrow Y \}$. $Mor(Equa-Func)$ - преобразования, в том числе следующие: кроме общих Примеров 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3.

Пример 2.4. Преобразование аргумента. Для функции $x(t)$ вводится биективная замена $t=\psi(s)$, обозначается $z(s)=x(\psi(s))$ из нового пространства функций Z и вводится предикат P_1 , такие, что $\{x \in X: P(x)\} = \{z \in Z: P_1(z)\}$.

Категория уравнений с непрерывными обобщенными предикатами.

Определение 2.3. $Ob(Equa-Top)$ - наборы $\{$ топологические пространства X, Y , функция - обобщенный предикат $P(x)$ на X , принимающая конечный набор значений, из них одно выделенное «истина», преобразование $B: X \rightarrow Y\}$, при условии, что при непрерывном переходе в X по функции $P(x)$ меняет значения только на соседние $\}$. (Такую функцию предлагается называть обобщенно-непрерывной).

$Mor(Equa-Top)$ - ретракты топологического пространства X так, что сохраняется область со значением «истина».

Простой пример такого определения:

Пример 2.5. Функция $P(x)$ принимает значения, соседние между собой следующим образом: «минус»-«истина»-«плюс». Если пространство X связно, то

$$((\exists x \in X)(P(x) = \text{«минус»}) \wedge (\exists x \in X)(P(x) = \text{«плюс»})) \Rightarrow (\exists x \in X)(P(x) = \text{«истина»}).$$

Более сложный пример - компьютерная реализация принципа ненулевого вращения на плоскости с помощью интервального анализа [4].

Пример 2.6. Функция $P(x)$ принимает пять значений, по квадрантам координатной плоскости и в начале координат (истина). Связность между ними определяется следующим образом:

II		—		I
	\		/	
		истина		
	/		\	
III		—		IV

На плоскости определяется некоторый замкнутый контур и точка на нем. Первоначальное значение «суммы» полагается равным 0. Каждый переход против часовой стрелки дает $(+1)$ в «сумму», по часовой стрелке $- (-1)$ в «сумму». Если полный обход по контуру не дает значений «истина» и дает ненулевую «сумму» (кратную 4), то внутри контура существует точка x_0 , где $P(x_0) = \text{«истина»}$.

Для уравнений с параметрами предлагается

О п р е д е л е н и е 2.4. $Ob(Equa-Par)$ - наборы $\{ \text{непустые множества } X, F, Y, \text{ предикат } P(x, f) \text{ на } X \times F, \text{ преобразование } B: X \rightarrow Y \}$.

Решением уравнения $\{X, F, Y, P, B\}$ для любого $f \in F$ будем называть такое $y(f) \in Y$, что $(\exists x \in X)(P(x, f) \wedge (y = B(x)))$.

В частности, если B - тождественное преобразование, то получаем только задачу решения уравнения “ $P(x, y)$ ”.

$Mor(Equa-Par)$ - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$ (кроме F), что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Для корректных уравнений с параметрами предлагается

О п р е д е л е н и е 2.5. $Ob(Equa-Par-Top)$ - наборы $\{ \text{топологические пространства } X, F, Y, \text{ предикат } P(x, f) \text{ на } X \times F, \text{ непрерывное преобразование } B: X \rightarrow Y \}$. При этом 1) $(\forall f \in F)(\exists! y \in Y)(\exists x \in X)(P(x, f) \wedge (y = B(x)))$;

2) y непрерывно зависит от f .

$Mor(Equa-Par-Top)$ – преобразования, сохраняющие свойства 1) и 2).

В частности, если предикат записывается в виде $P(x, f) = "A(x) = f"$, где A - некоторый оператор, то получаем «корректность по Адамару».

П р и м е ч а н и е. Обычно под словом «параметр» понимается «числовой параметр». В данном определении это понятие используется более широко - корректность по различным объектам, всходящим в условие задачи, как это было предложено в [5].

Подкатегорией всех упомянутых категорий является категория корректных уравнений для функций с параметрами, которую можно обозначить *Equa-Func-Par-Top*.

Список использованных источников

1. Медведев М.Я. Полусопряженные функторы и категории алгебр над n -тройками: Автореферат диссертации к.ф.-м.н. (01.01.04). - Новосибирск, 1973. - 17 с.
2. Борубаев А.А. О категорных характеристиках компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп // Известия Академии наук, вып.4, 2007. - С. 1-6.
3. Rosický J. Equational categories // *Cachiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, vol. 22, no. 1, 1981. - Pp.85-95.
4. Кененбаева Г.М. Применение доказательных вычислений к поиску областей, удовлетворяющих заданным свойствам [Текст] / Г.М.Кененбаева. - Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н., 05.13.16. - Новосибирск, 1991. - 16 с.
5. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика. - Киев: Наукова думка, 1976. - 270 с.

MSC 49M37

ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Чороев К.

КНУ им. Ж.Баласагына

Статьяда Кыргыз Республикасынын экономикасы татаал система катары каралат. Региондордун өнүгүшүндө тармактык диспропорциянын терс таасири аныкталган жана эл чарба комплексин сапаттуу өзгөртүү негизделген. Приоритеттүү жана жардамчы тармактарды өнүктүрүү менен регион деңгээлинде экономиканын түзүмүн оптималдаштыруу жана конкуренцияга жөндөмдүүлүктү жогорулатууга багытталган ыкмалар сунушталган.

Урунттуу сөздөр: Татаал система, тармактык түзүм, оптимизация, конкуренцияга жөндөмдүүлүк.

В статье экономика Кыргызской Республики рассматривается как сложная система. Выявлена негативная роль сложившихся отраслевых диспропорций в развитии региона и обоснована необходимость качественного преобразования структуры народно-хозяйственного комплекса Кыргызской Республики. Предложен подход к оптимизации

отраслевой структуры экономики региона, на основе выделения приоритетных и вспомогательных отраслей, обладающими устойчивыми связями и образующими направления повышения конкурентоспособности региона.

Ключевые слова: Сложная система, отраслевая структура, оптимизация, конкурентоспособность.

The article considers the economy of the Kyrgyz Republic as a complex system. The negative role of the existing sectoral disproportions in the development of the region is revealed and the need for a qualitative transformation of the structure of the national economic complex of the Kyrgyz Republic is substantiated. An approach to optimizing the sectoral structure of the regional economy is proposed, based on the identification of priority and auxiliary sectors with stable links and forming directions for improving the competitiveness of the region.

Key words: Complex system, branch structure, optimization, competitiveness.

Президентом КР 2018 год объявлен годом развития регионов. Темпы роста экономики регионов и в целом КР в последние годы не приводят к решению многих накопившихся социально-экономических проблем республики, таких как высокая безработица, низкий уровень развития промышленности, дефицитность бюджета, высокая доля теневой экономики и др. Это связано, прежде всего дифференциацией территорий по уровню развития, сложившимися диспропорциями в отраслевой структуре экономики республики.

Основными недостатками сложившейся отраслевой структуры экономики республики являются следующие:

- высокий удельный вес отраслей сельского хозяйства и торговли и сферы услуг;
- низкий удельный вес промышленности;
- диспропорция между производством сельскохозяйственного сырья и его промышленной переработкой;
- диспропорции между добывающими и обрабатывающими отраслями промышленности;
- высокий уровень теневого сектора, который деформирует рынок, снижает налоговый потенциал;
- топливно-энергетической зависимости республики от внешних поставщиков.

Эти и другие проблемы свидетельствуют о необходимости структурных преобразований в народном хозяйстве республики и его основных отраслях с учетом географических и природно-климатических условий регионов. Особую актуальность это приобретает в условиях вхождения республики в состав ЕАЭС. Для оптимизации этого необходимо решить проблему определения основных направлений и подходов к оптимизации отраслевой структуры экономики, исходя из ее специфики и современных вызовов.

Оптимальная отраслевая структура экономики региона – это такое соотношение и зависимость между отраслями народного хозяйства, которое обеспечивает конкурентоспособность экономики на международном уровне и обеспечивающее устойчивое социально-экономическое развитие за счет эффективной реализации конкурентных преимуществ регионов республики.

К таким конкурентным преимуществам республики относятся природно-сырьевые ресурсы, трудовые ресурсы и их квалификация, научный, управленческий потенциал, производственная база, а также предпринимательский климат, качество управленческого потенциала, инфраструктура и др.

Регионы республики сильно отличаются друг от друга по географическими расположениями, климатическим и природно-ресурсными факторами. Более 90% территории республики является горными. В каждом регионе есть свой одному ему присущий набор конкурентных отраслей. На наш взгляд политика выравнивания экономики регионов несостоятельны. Регионы получают преимущества благодаря различиям, а не сходству. Для республики в перспективе необходимо быстрее адаптировать отраслевую структуру экономики регионов к рыночным методам ведения хозяйства, поддерживать структурообразующие предприятия и проводить разумную экономическую политику, факторы ценообразования обеспечивают сбалансированность регионального спроса и регионального предложения и способствуют росту показателей конкурентоспособности региона.

Так как, республика является аграрной республикой, во всех регионах необходимо развивать производства перерабатывающей отрасли сельскохозяйственной продукции.

Обобщающим критерием и конечной целью оптимизации отраслевой структуры экономики регионов является конкурентоспособность экономики регионов. Выбор такого вектора оптимизации отраслевой структуры экономики республики связан проблемами неравномерного роста экономики регионов республики.

На наш взгляд, необходимо сконцентрировать усилия государственных органов на выделении и активном развитии приоритетных отраслей экономики регионов, которые будут способствовать повышению эффективности производства в других отраслях.

Это будет способствовать увеличению объемов конкурентоспособного валового продукта региона. Совокупные затраты производства должны быть покрываться за счет развития вспомогательных отраслей региона. Для приоритетных отраслей региона основным исходным фактором выступает природные факторы (географическое положение, природные условия, рекреационные ресурсы), определяющий специализацию территории. Например для Нарынского региона—животноводства, а для Иссык-Кульской области — туризм и сельское хозяйство.

Предложенный подход позволит избежать не системность и разнонаправленность инвестиционных вложений и позволит обеспечить мультипликационный эффект развития отраслей.

Таким образом, для оптимизации отраслевой структуры регионов республики необходимы:

- 1) С учетом природно-климатических условий, географических положений определить для каждого региона приоритетных отраслей;
- 2) Для ускоренного развития приоритетных отраслей, формировать вспомогательных отраслей и обслуживающих отраслей.

Таким образом, оптимизация отраслевой структуры региона может быть представлена в виде следующей схемы (см. рис. 1.).

На основе данной оптимальной схемы, предложена следующая отраслевая структура экономики Республики (см. рис. 2.).

Анализ состояния и оценка совокупности имеющегося экономического потенциала позволили определить следующие приоритетные отрасли развития экономики КР:

1. Модернизация и реструктуризация агропромышленного комплекса в высокотехнологичную отрасль экономики.
2. Формирование развитой индустрии строительства и производства стройматериалов.

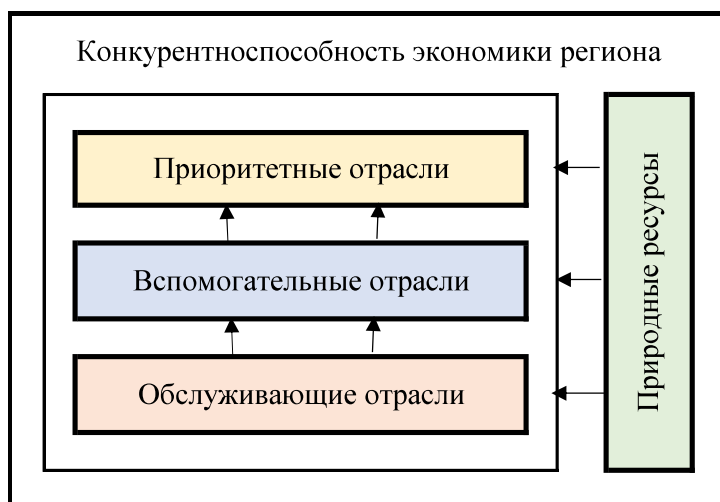


Рис. 1. Направления развития и связи отраслей в оптимальной структуре экономики региона



Рис. 2. Структурообразующие и вспомогательные отрасли экономики Кыргызской Республики.

3. Развитие топливно-энергетического комплекса.

Развитие сельского хозяйства и пищевой промышленности является основой обеспечения продовольственной безопасности, реального повышения уровня жизни всего населения республики. Производство отдельных видов продукции сельского хозяйства, особенно овощей, плодов и животноводческой продукции увеличивается высокими темпами и по разным оценкам высокие темпы роста производства сельхозпродукции сохраняться ближайшие годы. Однако вся инфраструктура по хранению, транспортировке, сбыту и переработке этой продукции находится в упадке. Возникла и много лет существует диспропорция между производством и переработкой сельхозпродукции. Поэтому организация переработки сельхозпродукции является важнейшим условием развития сельского хозяйства.

Точкой экономического роста выступает и строительство, хотя в настоящее время масштабы производства строительных материалов в

республике недостаточны для покрытия собственных потребностей. Развитие отрасли объективно необходимо и даст значительный мультипликационный эффект. Переход от строительства по типовым проектам к строительству по индивидуальным даёт толчок для широкого использования богатых запасов местных сырьевых ресурсов неметаллорудных ископаемых. В целом ресурсно-сырьевые условия региона в перспективе позволяют обеспечить развитие промышленности строительных материалов с номенклатурой продукции широкого ассортимента.

Топливо-энергетический комплекс (ТЭК) является базисом всей промышленности республики, от которого зависит энергетическая независимость и экономическое благополучие региона. Гидроэнергетический потенциал Кыргызстана составляет более 55,2 млрд. кВт/ч в год. Таким образом, для развития выделенных комплексов в республике имеются все необходимые природные ресурсы: уникальные запасы минеральных и термальных вод, значительные ресурсы нерудных и строительных полезных ископаемых. Республика располагает достаточно богатыми и разнообразными полезными ископаемыми, при рациональном использовании которых можно развивать высокодоходные отрасли добывающей и перерабатывающей промышленности.

В качестве эффективного инструмента реализации предложенного подхода оптимизации отраслевой структуры региона можно выделить кластерную систему организации хозяйства региона. Модернизация структуры должна проводиться в направлении устранения диспропорций в развитии отдельных отраслей и постепенной трансформации отраслевой структуры экономики в кластерную. Развитие кластеров как сетей производственных и сервисных организаций, создателей инновационных технологий и иных типов нововведений, связующих рыночных институтов, взаимодействующих друг с другом в рамках единой цепочки создания стоимости, может обеспечить в перспективе повышение конкурентоспособности экономики региона.

Список использованных источников

1. Сухарев О. С. Институты регионального развития концептуально-практический анализ организационных изменений // Экономический анализ: теория и практика. 2012. № 4. С. 2—12.

2. Национальный статистический комитет КР. <http://www.stat.kg/>.

MSC 35M33

СВЕДЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕЙ К СИСТЕМАМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Эгембердиев Ш.А.

Институт математики НАН КР

Кошумча аргумент ыкмасын колдонуу менен жекече туундулуу дифференциалдык тендемелер үчүн коюлган баштапкы-чектик маселелерди изилдөө.

Макаланын максаты: кошумча аргумент ыкмасын колдонуу менен жекече туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык тендемелер системасы үчүн коюлган баштапкы-чектик маселелерди изилдөөнүн негизинде каралган маселени интегралдык тендемелер системасына келтирү ыкмасын киргизүү.

Урунттуу сөздөр: кошумча аргумент, баштапкы-чектик маселе, интегралдык тендеме

Исследование с применением метода дополнительного аргумента к системам уравнений в частных производных с начально-краевой задачей. Цель статьи:

С помощью метода дополнительного аргумента свести системы нелинейных уравнений в частных производных с начально-краевой задачей к системам интегральных уравнений.

Ключевые слова: дополнительный аргумент, начально-краевая задача, интегральные уравнение.

The reduction using the method of an additional argument systems of nonlinear partial differential equations with initial-boundary value problem for systems of integral equations

Keywords: additional argument, initial-boundary value problem, integral equations.

В работах [1, 2] было показано, что при помощи метода дополнительного аргумента могут быть исследованы системы дифференциальных уравнений с различными начально-краевыми условиями.

В данной работе рассматривается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + v(t, x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} = - \frac{\partial p(t, x)}{\partial x} + f(t, x, v(t, x)), t \in [0, T] \quad (1)$$

$$-\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} \right)^2 + g(t,x), \quad x \in [0,X] \quad (2)$$

с начально-краевыми условиями

$$v(0,x) = \varphi(x), \quad v(t,0) = \psi(t), \quad v(t,X) = \mu(t), \quad (3)$$

$$p(t,X) = \alpha(t), \quad \frac{\partial p(t,0)}{\partial x} = \gamma(t). \quad (4)$$

Считается, что функции $f(t,x,v(t,x))$, $g(t,x)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$, $\mu(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и выполнено следующее условие согласования

$$\varphi(0) = \psi(0), \quad (5)$$

кроме того, $\psi(t) \geq \Psi = \text{const} > 0, t \in [0,T]$.

Требуется найти функции $v(t,x)$, $p(t,x)$, удовлетворяющие уравнению (1)-(2) и начально-краевым условиям (3)-(4).

Из краевой задачи (2), (4) вытекают формулы для $p(t,x)$

$$p(t,x) = \alpha(t) + \gamma(t)(x-X) + (x-X) \int_0^x [\partial_s v(t,s) - g(t,s)] ds + \int_x^X (s-X) [\partial_s v(t,s) - g(t,s)] ds.$$

Дифференцировав (1) по x и воспользовавшись равенством (2), получим

для $w(t,x) := \frac{\partial v(t,x)}{\partial x}$ уравнение

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} + v(t,x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x} = - \frac{\partial f(t,x,v(t,x))}{\partial x} + \frac{\partial f(t,x,v(t,x))}{\partial v} w(t,x) + g(t,x), \quad (6)$$

где

$$v(t,x) = \mu(t) + \int_x^X w(t,s) ds.$$

Из (3) следует $w(0,x) = \varphi'(x)$, а $w(t,0)$ и $w(t,X)$ определяется из равенств:

$$\frac{\partial v(t,0)}{\partial t} + v(t,0)w(t,0) = - \frac{\partial p(t,0)}{\partial x} + f(t,0,v(t,0)),$$

$$\frac{\partial v(t,X)}{\partial t} + v(t,X)w(t,X) = - \frac{\partial p(t,X)}{\partial x} + f(t,X,v(t,X)).$$

Которые приводят к соотношениям

$$w(t,0) = (1/\psi(t)) [f(t,0,\psi(t)) - \gamma(t) - \psi'(t)].$$

$$w(t,X) = (1/\mu(t)) [f(t,X,\mu(t)) - \alpha'(t) - \mu'(t)].$$

Обозначив правую сторону этих уравнений через $\beta(t)$ и $\tau(t)$, можем записать начально-краевые условия для уравнения (6) в виде

$$w(0,x)=\varphi'(x), \quad w(t,0)=\beta(t), \quad w(t,X)=\tau(t). \quad (7)$$

условия согласования для задачи (6)-(7) будут иметь вид

$$\varphi'(0)=\beta(0). \quad (8)$$

Задачу (6)-(7) можно свести к следующей системе уравнений и доказать их, эквивалентность т.е.

$$\begin{aligned} w(t,x) = & \beta(z(t,x)) + \varphi'(q(z(t,x),t,x)) - \varphi'(0) + \\ & \int_{z(t,x)}^t [\partial_s f(\rho, q(\rho, t, x), \psi(\rho) + \int_{r(t,\rho)}^x w(\rho, q(\rho, t, \tau)) \exp(-\int_{\rho}^t w(\eta, q(\eta, t, \tau)) d\eta) d\tau) d\rho + \\ & + \int_{z(t,x)}^t [\partial_v f(\dots) w(\rho, q(\rho, t, x)) d\rho + \int_{z(t,x)}^t g(\rho, q(\rho, t, x)) d\rho, \end{aligned} \quad (9)$$

при $(t,x) \in G$, где $G = \{(t,x): 0 \leq z(t,x) \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq X + r(t,0) -$

$$\begin{aligned} & \int_{r(t,0)}^x (1 - \exp(-\int_0^t w(\eta, q(\eta, t, \tau)) d\eta)) d\tau \}; \\ r(t,s) = & \int_s^t \psi(\tau) \exp(\int_{\tau}^t w(\eta, q(\eta, t, r(t,\tau))) d\eta) d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

при $(t,s) \in G_2 = \{(s,t): 0 \leq s \leq t \leq T\}$;

$$q(s,t,x) = \int_{r(t,s)}^x \exp(-\int_s^t w(\eta, q(\eta, t, \tau)) d\eta) d\tau, \quad (11)$$

при $(s,t,x) \in P$, где $P = \{(s,t,x): z(t,x) \leq s \leq t \leq T, \quad r(t,s) \leq x \leq X + r(t,0) -$

$$\begin{aligned} & \int_{r(t,0)}^x (1 - \exp(-\int_0^t w(\eta, q(\eta, t, \tau)) d\eta)) d\tau \}; \\ x = & \int_{z(t,x)}^t \psi(\tau) \exp(\int_{\tau}^t w(\eta, q(\eta, t, r(t,\tau))) d\eta) d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

при $(t,x) \in G_1$, где $G_1 = \{(t,x): 0 \leq z(t,x) \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq r(t,0)\}$,

с условием $z(t,0)=t$, при $t \in [0, T]$, (13)

$$z(0,x) \equiv 0, \quad \text{при } (t,x) \in G_2, \quad (14)$$

где $G_2 = \{(t,x): t \in [0, T], \quad r(t,0) \leq x \leq X + r(t,0) - \int_{r(t,0)}^x (1 - \exp(-\int_0^t w(\eta, q(\eta, t, \tau)) d\eta)) d\tau \}$.

Лемма. Если функции $w(t,x)$, $z(t,x)$, $r(t,x)$, $q(s,t,x)$ удовлетворяют системе соотношений (9)-(14), причем $w(t,x) \in C^{l,l}(G)$, $z(t,x) \in C^{l,l}(G_1)$, $r(t,s) \in C^{l,l}(R)$, $q(s,t,x) \in C^{l,l,l}(P)$ и выполнено условие согласования (8), то $w(t,x)$ будут удовлетворять дифференциальному уравнению (6) и начальным условиям (7).

Наоборот, если задача (6)-(7) имеет непрерывно дифференцируемое решение $w(t,x)$, выполнено условие согласования (8), функции $w(t,x)$, $z(t,x)$, $r(t,s)$, $q(s,t,x)$ удовлетворяют соотношениям (10)-(14), то функция $w(t,x)$ является решением интегрального уравнения (9).

Список использованных источников

1. Алексеенко С.Н., Эгембердиев Ш.А. Доказательство дифференцируемости решений нелинейных уравнений в частных производных при исследовании их методом дополнительного аргумента// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Бишкек: Илим, 1999 г.- Вып.28.-С.270-278.
2. Эгембердиев Ш.А. Построение решений краевых задач методом дополнительного аргумента// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2001.- Вып. 30. -С.219-221.
3. Egemberdiev Sh. A. Solving nonlinear partial differential equations by the additional argument method// В. сбор. тр.: Analytical and approximate methods.- Germany. ShakerVerlag. 2003.-P.55-61.

MSC: 45A05

О КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА- СТИЛТЬЕСА НА БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Абдукаримов А.М.

Институт математики НАН КР

Бул макалада Вольтер-Стилтьес тибиндеги интегралдык тендемелердин чыгарылыштары чексиз аймакта каралат.

Урунттуу сөздөр: бөлүп-бөлүп интегралдоо, Коши-Буняковскийдин барабарсыздыгы

В этой статье рассматривается вопрос о квадратичной интегрируемости решений двумерных линейных интегральных уравнений типа Вольтерра-Стилтьеса на бесконечных областях.

Ключевые слова: интегрирование по частям, неравенство Коши-Буняковского.

This paper deals with the question of quadratic integrability of solutions of two-dimensional linear Volterra-Stieltjes-type integral equations on infinite domains.

Key words: integrate by parts, the Cauchy-Bunyakovsky inequality

Нам понадобятся следующие легко доказуемые леммы:

ЛЕММА 1. Для любых дифференцируемых функций K, W справедливо

$$\text{соотношение } KWW'_{\varphi(s)} = \frac{1}{2}(KW^2)'_{\varphi(s)} - K_{\varphi(s)}'W^2.$$

Рассмотрим уравнение:

$$u(t, x) + \int_0^t K_1(t, x)a(t, x, s)K_1(s, x)u(s, x)d\varphi + \int_0^x K_1(t, x)b(t, x, y)K_1(t, y)u(t, y)d\psi(y) = f(t, x) \quad (1)$$

где $K_1(t, x)$, $a(t, x, s)$, $b(t, x, y)$, $f(t, x)$ - известные непрерывные функции, $u(t, x)$ - неизвестная функция, $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ - возрастающие непрерывные функции в $[0, \infty)$, здесь все интегралы понимаются по Стилтьесу.

Обозначим через $C(G)$ -пространство всех непрерывных функций на $G = \{(t, x) / 0 \leq t < \infty, 0 \leq x < \infty\}$. Через $L^2_{\varphi, \psi}(G)$ обозначим пространство всех функций $u(t, x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |u(t, x)|^2 d\varphi(t) d\psi(x) < \infty$$

Вопрос единственность и принадлежность решения пространству непрерывных и квадратичных суммируемых функций для линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на полуоси рассматривался в работе [1]. Для систем линейных интегральных уравнений типа Вольтерра I рода на полуоси изучены в работе [3].

Для функций от двух независимых переменных аналогичных вопросы исследовались в работах [2].

Ограниченность и устойчивость решения слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра на полуоси рассмотрена в работе [4].

ТЕОРЕМА. Если выполняются условия: $f(t, x) \in L^2_{\varphi, \psi}(G) \cap C(G)$,

а) функции $a(t, x, s), a'_{\varphi(t)}(t, x, s), a'_{\varphi(s)}(t, x, s), a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t, x, s) \in C(G_1)$,

$G_1 = \{(t, x, s) / 0 \leq s \leq t < \infty, 0 \leq x < \infty\}$, $a(t, x, 0) \geq 0$ и $a'_{\varphi(t)}(t, x, 0) \geq 0, K_1(t, x) > 0$ при $(t, x) \in G$;

$a'_{\varphi(s)}(t, x, s) \leq 0$ и $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t, x, s) \leq 0$ при $(t, x, s) \in G_1$;

б) функции $b(t, x, y), b'_{\psi(x)}(t, x, y), b'_{\psi(y)}(t, x, y), b''_{\psi(x)\psi(y)}(t, x, y) \in C(G_2)$,

$G_2 = \{(t, x, y) / 0 \leq t < \infty, 0 \leq y \leq x < \infty\}$, $b(t, x, 0) \geq 0$ и $b'_{\psi(x)}(t, x, y) \geq 0$ при $(t, x) \in G$;

$b'_{\psi(y)}(t, x, y) \leq 0$ и $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t, x, y) \leq 0$ при $(t, x, y) \in G_2$;

то уравнение (1) имеет единственное решение в $L^2_{\varphi, \psi}(G) \cap C(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из непрерывности всех известных функций в (1) следует, что это уравнение имеет непрерывное решение $u(t, x)$.

Обе части тождества (1) умножим на $u(t, x)$ и проинтегрируем по области $G_{t,x} \{0 \leq s \leq t; 0 \leq y \leq x\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^x u^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) + \int_0^t \int_0^x \int_0^s K_1(s, y) a(s, y, \tau) K_1(\tau, y) u(\tau, y) u(s, y) d\varphi(\tau) d\psi(y) d\varphi(s) + \\ & + \int_0^t \int_0^x \int_0^s K_1(s, y) b(s, y, z) K_1(s, z) u(s, z) u(s, y) d\psi(z) d\psi(y) d\varphi(s) = \int_0^t \int_0^x f(s, y) u(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) \quad (2) \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$u_1(t, x) = K_1(t, x) u(t, x), \quad (t, x) \in G$$

При помощи которого перепишем (2) в следующем виде

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^x u^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) + \int_0^t \int_0^x \int_0^s a(s, y, \tau) u_1(\tau, y) u_1(s, y) d\varphi(\tau) d\psi(y) d\varphi(s) + \\ & + \int_0^t \int_0^x \int_0^s b(s, y, z) u_1(s, z) u_1(s, y) d\psi(z) d\psi(y) d\varphi(s) = \int_0^t \int_0^x f(s, y) u(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) \quad (3) \end{aligned}$$

Преобразуем каждый из интегралов левой части уравнения (3).

По формуле интегрирования по частям и по обобщенной формуле Дирихле с учетом леммы 1 получим:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^x \int_0^s a(s, y, \tau) u_1(\tau, y) u_1(s, y) d\varphi(\tau) d\psi(y) d\varphi(s) = - \int_0^t \int_0^x \int_0^s a(s, y, \tau) \frac{\partial}{\partial \varphi(\tau)} \left(\int_\tau^s u_1(\xi, y) d\varphi(\xi) \right) \times \\
& \times d\varphi(\tau) u_1(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) = \int_0^t \int_0^x a(s, y, 0) \left(\int_0^s u_1(\xi, y) d\varphi(\xi) \right) u_1(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) + \\
& + \int_0^t \int_0^x \int_0^s a'_{\varphi(\tau)}(s, y, \tau) \left(\int_\tau^s u_1(\xi, y) d\varphi(\xi) \right) u_1(s, y) d\varphi(\tau) d\psi(y) d\varphi(s) = \frac{1}{2} \int_0^x a(t, y, 0) \times \\
& \times \left(\int_0^t u_1(\xi, y) d\varphi(\xi) \right) d\psi(y) - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x a'_{\varphi(s)}(s, y, 0) \left(\int_0^s u_1(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\psi(y) d\varphi(s) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x a'_{\varphi(\tau)}(t, y, \tau) \left(\int_\tau^t u_1(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\psi(y) d\varphi(\tau) - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \int_0^t a''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s, y, \tau) \left(\int_\tau^s u_1(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\varphi(s) d\psi(y) d\varphi(\tau). \tag{4}
\end{aligned}$$

Аналогично этому получим для второго слагаемого:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^x \int_0^y b(s, y, z) u_1(s, z) u_1(s, y) d\psi(z) d\psi(y) d\varphi(s) = \frac{1}{2} \int_0^t b(s, x, 0) \left(\int_0^x u_1(s, v) d\varphi(v) \right)^2 d\varphi(s) - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x b'_{\psi(y)}(s, y, 0) \left(\int_0^y u_1(s, v) d\psi(v) \right)^2 d\psi(y) d\varphi(s) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x b'_{\psi(z)}(s, x, z) \left(\int_z^x u_1(s, v) d\psi(v) \right)^2 d\psi(z) d\varphi(s) - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \int_0^y b''_{\psi(y)\psi(z)}(s, y, z) \left(\int_z^y u_1(s, v) d\psi(v) \right)^2 d\psi(z) d\psi(y) d\varphi(s). \tag{5}
\end{aligned}$$

Учитывая формулы (4)- (5) и условие а), б) из (2) имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^x u^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) + \frac{1}{2} \int_0^t a(t, y, 0) \left(\int_0^t u_1(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\psi(y) - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x a'_{\varphi(s)}(s, y, 0) \left(\int_0^s u_1(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\psi(y) d\varphi(s) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x a'_{\varphi(\tau)}(t, y, \tau) \left(\int_\tau^t u_1(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\psi(y) d\varphi(\tau) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \int_0^s a''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s, y, \tau) \left(\int_{\tau}^s u_1(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\varphi(s) d\psi(y) d\varphi(\tau) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t b(s, x, 0) \left(\int_0^x u_1(s, v) d\varphi(v) \right)^2 d\varphi(s) - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x b'_{\psi(y)}(s, y, 0) \left(\int_0^y u_1(s, v) d\psi(v) \right)^2 d\psi(y) d\varphi(s) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x b'_{\psi(z)}(s, x, z) \left(\int_z^x u_1(s, v) d\psi(v) \right)^2 d\psi(z) d\varphi(s) - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \int_0^y b''_{\psi(y)\psi(z)}(s, y, z) \left(\int_z^y u_1(s, v) d\psi(v) \right)^2 d\psi(z) d\psi(y) d\varphi(s) = \int_0^t \int_0^x f(s, y) u(s, y) d\psi(y) d\varphi(s)
\end{aligned} \tag{6}$$

В силу условий а), б) из (6) имеем

$$\int_0^t \int_0^x u^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) \leq \left| \int_0^t \int_0^x f(s, y) u(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) \right|. \tag{7}$$

В правой части неравенства (7), применяя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\int_0^t \int_0^x u^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) \leq \left(\int_0^t \int_0^x f^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^x u^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что при $(t, x) \in G$.

$$\left(\int_0^t \int_0^x u^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^t \int_0^x f^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Из последнего неравенства переходом к пределу при $t \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow \infty$ получим:

$$\|u(t, x)\|_{L^2_{\varphi, \psi}(G)} = \left(\int_0^\infty \int_0^\infty u^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^\infty \int_0^\infty f^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) \right)^{\frac{1}{2}} = \|f(t, x)\|_{L^2_{\varphi, \psi}(G)}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (1) при

$$u(t, x) + \int_0^t K_1(t, x) a(t, x, s) K_1(s, x) u(s, x) d\varphi + \int_0^x K_1(t, x) b(t, x, y) K_1(t, y) u(t, y) d\psi(y) = f(t, x)$$

$$u(t, x) = e^{-x} e^{-t} \quad a(t, x, s) = 2e^{-s} e^{-x} t$$

$$\varphi(t) = e^t, \psi(x) = e^x \quad b(t, x, y) = 2e^{-y} e^{-t} x$$

$$K_1(t, x) = e^{-2t} e^{-2x}$$

$$f(t, x) = e^{-x} e^{-t} + \int_0^t e^{-2t} e^{-2x} 2e^{-s} e^{-x} t e^{-2s} e^{-2x} e^{-s} e^{-x} d(e^s) + \int_0^x e^{-2t} e^{-2x} 2e^{-y} e^{-t} x e^{-2t} e^{-2y} e^{-t} e^{-y} d(e^y)$$

$$f(t, x) = e^{-x} e^{-t} + 2te^{-2t} e^{-6x} \int_0^t e^{-3s} ds + 2xe^{-6t} e^{-2x} \int_0^x e^{-3y} dy \in L^2_{\varphi, \psi}(G) \cap C(G)$$

и покажем, что выполняются условия а), б).

Проверим условия а)

$$a'_{\varphi(t)}(t, x, s) = (2e^{-s} e^{-x} t)'_{\varphi(t)} = 2e^{-s} e^{-x} e^{-t} \geq 0,$$

$$a'_{\varphi(s)}(t, x, s) = (2e^{-s} e^{-x} t)'_{\varphi(s)} = -2e^{-2s} e^{-x} e^{-t} \leq 0$$

$$a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t, x, s) = (2e^{-s} e^{-x} t)''_{\varphi(t)\varphi(s)} = -2e^{-2s} e^{-x} e^{-t} \leq 0$$

Проверим условия б)

$$b'_{\psi(t)}(t, x, y) = (2e^{-y} e^{-t} x)'_{\psi(t)} = 2e^{-y} e^{-t} e^{-x} \geq 0,$$

$$b'_{\psi(y)}(t, x, y) = (2e^{-y} e^{-t} x)'_{\psi(y)} = -2e^{-2y} e^{-t} x \leq 0$$

$$b''_{\psi(x)\psi(y)}(t, x, y) = -2e^{-2y} e^{-t} e^{-x} \leq 0$$

Список использованных источников

1. Асанов А., Абдукаримов А. Ограниченность и квадратичная суммируемость решений линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на полуоси // Вестн. ОшГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2001. - №4. – С. 48-53.
2. Асанов А., Абдукаримов А.М. Квадратичная интегрируемость решений систем двумерных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными не неограниченных областях // Вест. КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. мат., мех., инф. -2004. - №1 (40). – С. 48-58.
3. Ведь Ю.А., Искандаров С. Об ограниченности решений линейной системы интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Уральск. регион. конф. «Функционально-дифференц. уравнения. уравнения и их

приложения», Пермь, фев. 1988 г.: Тез. докл. -Пермь: Пермск. гос. ун-т, 1988. - С. 102.

4. Искандаров С. Об ограниченности, устойчивости и принадлежности пространству $L^2[t_0, \infty)$ решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. –Фрунзе: Илим, 1981. – Вып. 14. - С. 149-158.

MSC 37T99

ЗАДАЧА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Туркманов Ж.К., Карасаев И. К.

Институт математики НАН КР, БГУ им. К.Карасаева

Бул иште 10^{-10} тактыгында Ляпуновдун көрсөткүчүн эсептөөнүн өзгөчө ыкмасы көрсөтүлөт жана каралып жаткан динамикалык системанын фундаменталдык чыгарылышы тургузулат. Алынган жыйынтыктар борбордук генералдык жана мүнөздөөчү көрсөткүчтөрдү жана динамикалык системанын фундаменталдык чыгарылыштарын классикалык ыкма менен аныктоо алсыз экенин көрсөтөт.

Урунттуу сөздөр: нормалдуу аныктагыч, уюлдук алып жүрүүчү, уюлдаштыруучу матрица, декремент, Карасайдын аныктагычы, чечүүчү тендеме.

В данной работе нетрадиционным методом производится вычисление показателя Ляпунова с точностью 10^{-10} и строится фундаментальная система решения, рассматриваемой динамической системы. Полученные результаты говорят о том, что классические методы определения центральных, генеральных и характеристических показателей и построения фундаментальных систем решений нестационарных динамических систем устарели.

Ключевые слова: нормальный определитель, носитель поляризации, поляризующая матрица, декремент, детерминант Карасая, разрешающее уравнение.

In this paper, using an unconventional method, the Lyapunov exponent is calculated with accuracy 10^{-10} and a fundamental solution system of the dynamical system under consideration is constructed.

The results suggest that the classical methods for determining the central, general and characteristic indicators and the construction of the fundamental systems of solutions for non stationary dynamic systems are outdated.

Key words: normal determinant, polarization carrier, polarizing matrix, decrement, Karasay determinant, resolving the equation.

Теорема 1. Если решение уравнения

$$\ddot{x} + \cos^3 t \cdot x = 0 \quad (1)$$

ищется в виде

$$x = e^{\mu t} z, z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} z_q e^{iqt} \quad (2)$$

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} (\mu + iq)^k z_q \quad (k = 0, 1, 2,) \quad (2a)$$

сходится абсолютно, то для уравнения (1) разрешающее уравнение имеет вид

$$A_1(\mu) \vec{z} = 0, \quad (3)$$

где $\vec{z} = (\dots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots)$ – неизвестный вектор,

$$\begin{pmatrix} \frac{(\mu-2i)^2}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{3}{8} \frac{1}{(\mu-2i)^2} & 0 & \frac{1}{8} \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & 0 \\ \frac{3}{8} \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{(\mu-i)^2}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{3}{8} \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & 0 & \frac{1}{8} \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} \\ 0 & \frac{3}{8} \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{(\mu-0i)^2}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{3}{8} \frac{1}{(\mu-0i)^2-\alpha} & 0 \\ \frac{1}{8} \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & 0 & \frac{3}{8} \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{(\mu+i)^2}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{3}{8} \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} \\ 0 & \frac{1}{8} \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & 0 & \frac{3}{8} \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{(\mu+2i)^2}{(\mu-2i)^2-\alpha} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$a_{p-q} = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{если } p-q = \pm 3, \\ \frac{3}{8}, & \text{если } p-q = \pm 1, \\ 0, & \text{если } p-q = \pm 2. \end{cases}$$

Доказательство. Из (1), (2) и (2a), имеем

$$(\mu + ip)^2 z_p + \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_{p-q} z_q = 0. \quad (5)$$

$$p = (\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Тем самым получили бесконечную линейную алгебраическую систему, которую можно написать в векторной форме.

$$A_0(\mu) \cdot \vec{z} = 0, \quad (6)$$

где $A_0(\mu)$ – матрица следующего вида:

$$A_0(\mu) = \begin{pmatrix} (\mu-2i)^2 - \alpha & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{3}{8} & (\mu-i)^2 - \alpha & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & (\mu-0i)^2 - \alpha & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & (\mu-i)^2 - \alpha & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & (\mu-2i)^2 - \alpha \end{pmatrix}.$$

От характеристических показателей μ требуем, чтобы выполнялось неравенство [2].

$$(\mu + ip)^2 - \alpha \neq 0, \quad (7)$$

$$(p = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots),$$

α произвольное комплексное число – носитель поляризации.

На векторное уравнение (6) слева подействуем поляризующей матрицей [2], где

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu-2i)^2 - \alpha} & & & & \\ & \frac{1}{(\mu-i)^2 - \alpha} & & & \\ & & \frac{1}{(\mu-0i)^2 - \alpha} & & \\ & & & \frac{1}{(\mu+i)^2 - \alpha} & \\ & & & & \frac{1}{(\mu+2i)^2 - \alpha} \end{pmatrix}$$

Тогда, имеем (3).

Легко доказать, что матрица (4) имеет нормальную форму [1, стр.332].

Определитель нормальной матрицы также называется нормальным определителем. Нормальная система бесконечных линейных уравнений обладает свойством конечных систем. В частности, она имеет нетривиальное решение, тогда и только тогда, когда ее определитель равен 0.

$$d_1(\mu) = \det A_1(\mu) = 0,$$

это есть уравнение для характеристических показателей для динамической системы (1).

Данную матрицу путем локализации можно свести к детерминанту Карасая [5].

$$-- \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} \frac{1}{2^2} & 0 & \frac{1}{8} \frac{1}{2^2} & 0 \\ \frac{3}{8} \frac{1}{1^2} & 1 & \frac{3}{8} \frac{1}{1^2} & 0 & \frac{1}{8} \frac{1}{1^2} \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} \frac{1}{1^2} & 0 & \frac{3}{8} \frac{1}{1^2} & 1 & \frac{3}{8} \frac{1}{1^2} \\ 0 & \frac{1}{8} \frac{1}{2^2} & 0 & \frac{3}{8} \frac{1}{2^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Формула Карасаева

$$d(0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} \frac{1}{2^2} & 0 & \frac{1}{8} \frac{1}{2^2} & 0 \\ \frac{3}{8} \frac{1}{1^2} & 1 & \frac{3}{8} \frac{1}{1^2} & 0 & \frac{1}{8} \frac{1}{1^2} \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} \frac{1}{1^2} & 0 & \frac{3}{8} \frac{1}{1^2} & 1 & \frac{3}{8} \frac{1}{1^2} \\ 0 & \frac{1}{8} \frac{1}{2^2} & 0 & \frac{3}{8} \frac{1}{2^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Значение детерминанта Карасая [6],

$$d(0) = 2a_{-1}a_1 = 0.75.$$

Теперь займемся построением фундаментальной системы решений для (1) (4.4.7). Заметим, что нулевая строка матрицы (3) содержит два изолированные полюсы $\pm\sqrt{\alpha}$. Поэтому $A_1(\mu)$ есть поляризованная матрица, что позволяет разложить определитель матрицы разложить в ряд по котангенсам, то есть свести бесконечный нормальный определитель к элементарной функции [3].

Теорема 2. [3] Динамическая система (1) (4.4.7) имеет фундаментальную систему решений

$$x_1 = e^{\mu_1 t} z_1, z_1 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_k^q(\mu_1) e^{iqt},$$

$$x_2 = e^{\mu_2 t} z_2, z_2 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_k^q(\mu_2) e^{iqt},$$

где $A_k^q(\mu_i) (i=1,2)$ – миноры элементов k -ой строки, где хотя бы один минор отличен от нуля, где ряды $\sum_{q=-\infty}^{\infty} A_k^q(\mu_i) (i=1,2)$ [8] сходятся абсолютно.

Доказательство. Известно, что уравнение (1) (4.4.7) разрешимо тогда и только тогда, когда разрешающее уравнение (3) (4.4.9) имеет решения [4].

$$\vec{z} = (\dots, A_k^{-2}(\mu), A_k^{-1}(\mu), A_k^0(\mu), A_k^1(\mu), A_k^2(\mu), \dots). \quad (8)$$

Заметим, что $\vec{z} = (\dots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots)$ есть решение разрешающего уравнения $A_1(\mu_1)\vec{z} = 0$. Бесконечная линейная система (5) однородна и декремент матрицы $A_1(\mu_1) = 1$, то координаты $\vec{z}_1$ пропорциональны минорам элементов k -ой строки, где хотя бы один минор отличен от нуля, если же таких миноров много, то в качестве такой строки можно взять любую из них:

$$z_q = A_k^q(\mu_1) (q = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда

$$x_1 = e^{\mu_1 t} z_1, z_1 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_k^q(\mu_1) e^{iqt},$$

где ряд сходится абсолютно. Аналогично можно построить второе решение

$$x_2 = e^{\mu_2 t} z_2, z_2 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_k^q(\mu_2) e^{iqt},$$

где ряд сходится абсолютно.

Список использованных источников

1. Каган В.Ф. Основания теории определителей. Одесса, 1922. 393 с.
2. Карасаев И.К. Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения // К построению фундаментальной системы уравнения Хилла: сборник трудов междунар. миниконф. М., 2010. С.104-116.
3. Карасаев И.К. Характеристическое уравнение для неполной динамической системы // Инновации в науке и образовании: Материалы III всероссийской научно-практической конф. -Новосибирск, 2016. С. 50-57.
4. Карасаев И.К., Туркманов Ж.К. Условие разрешимости неполной динамической системы. Москва, изд-во «Интернаука» часть I. №1 (60), 2017.

5. Карасаев И.К. Локализация бесконечных матриц // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям: Сборник № 45. Бишкек: Илим, 2012. С.94-99.
6. Карасаев И.К. Формула вычисления детерминанта Карасая. Москва, издательство «Интернаука» часть I. №1 (5), 2017.
7. Карасаев И.К. Новые терминологии, положенные в основу нового метода поляризации // Материалы 2-ой междунар. конф. «Актуальные проблемы топологии операторных уравнений». /Под общ.ред. проф. А.К.Керимбекова. Бишкек: «Maxprint», 2013. С.103.

MSC 97U30

ОТ ТЕОРИИ К ПРАКТИКЕ: КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Панкова Г. Д.

КНУ им. Ж.Баласагына

Студенттердин билиминин жана жөндөмүнүн калыптанышы, «Экономикадагы Информатика» сабагын окутуу процессинде, компьютердин программалык жабдыгында бар, каржылык функцияларын практикада колдонуу мисалдары аркылуу көрсөтүлгөн.

Урунттуу сөздөр: педагогикалык шарттар; билим берүү технологиясы; каржылык функциялар; Excel; MathCad; Access.

Представлено формирование знаний и умений студентов в процессе изучения дисциплины «Информатика в Экономике» на примере практики использования финансовых функций, имеющих в программном обеспечении компьютера.

Ключевые слова: педагогические условия; образовательная технология; финансовые функции; Excel; MathCad.

Performed formation of students' knowledge and skills within a process of studying of the subject "informatics in economics" by the example of using financial functions being in computer software.

Keywords: pedagogical conditions; educational technology; financial functions; Excel; MathCad.

Для формирования профессиональной компетентности студентов экономической специальности в процессе их обучения преподавателю необходимо определить цели и задачи, методы и средства формирования экономических знаний, а также педагогические технологии обучения для выработки умений и

навыков по использованию приобретенных знаний в будущей экономической деятельности. Формируя содержание конкретных учебных заданий для деятельности студента на занятии, преподаватель опирается на требования учебной программы, содержание учебного материала и соответствующую образовательную технологию.

Проектируя технологию проведения практических занятий с использованием дидактических возможностей информационных технологий на компьютере, преподаватель выбирает такие типовые задачи, которые

- представляют проблемные ситуации, связанных с решением профессиональных задач и имеются специальные технологии для реализации их решения на компьютере;

- позволяют усиливать задание дополнением условий, приводящих к модернизации поставленной задачи, углубляющее как использование экономических знаний, так и возможности программных средств по обработке экономической информации на компьютере;

- направлены на установление меж предметных связей при изучении дисциплины «Информатика в экономике» с различными экономическими дисциплинами: «Экономическая теория», «Финансы и кредит», «Экономическая статистика», «Бухгалтерский учет», «Математика» и другие;

- предполагают осуществление связи изучаемой студентом новой информационно-экономической деятельности с его имеющимся личным опытом;

- предполагают применение активных методов обучения для формирования информационно-экономических умений и навыков;

- предполагают осмысление полученных знаний и результатов практической деятельности в процессе работы на компьютере;

- позволяют студенту при необходимости помочь себе с помощью учебного пособия [1, 2].

В связи с этим нами обучение студентов дисциплине «Информатика в экономике» осуществляется в процессе выполнения на компьютере соответствующих задач по их будущей специальности.

Рассмотрим технологию процесса овладения и закрепления знаниями на основе предлагаемых студенту заданий при изучении дисциплины «Информатика в экономике».

При этом использование информационных технологий, направленных на освоение студентом того или иного изучаемого материала, приобретение умений и навыков реализуется через пошаговую самостоятельную работу по построению нового знания с помощью изменения его представления, с опорой на ранее усвоенный учебный материал.

Для этого студентам выдается задание, в котором для поставленной задачи надо найти решение, используя различные подходы и различные программные средства компьютера для перехода от теории к ее практическому применению.

При подготовке студентов экономической специальности необходимо определить цели и задачи, методы и средства формирования информационно-экономических знаний, а также педагогические условия выработки умений и навыков использования приобретенных знаний в будущей экономической деятельности.

Формируя содержание конкретных учебных заданий для деятельности студента на занятии, преподаватель опирается на требования учебной программы, содержание учебного материала и соответствующую образовательную технологию.

Проектируя технологию проведения практических занятий на компьютере, преподаватель выбирает такие типовые задачи, которые

- **представляют** проблемные ситуации, связанные с решением профессиональных задач, такие, что имеются *специальные* технологии для реализации их решения на компьютере;

- **позволяют** производить задание дополнительных условий, приводящих к модернизации поставленной задаче, углубляющей как его экономические знания, так и возможности программных средств по обработке экономической информации на компьютере;

- **направлены** на установление межпредметных связей при изучении дисциплины «Информатика в экономике» с различными экономическими дисциплинами: «Экономическая теория», «Финансы и кредит», «Экономическая статистика», «Бухгалтерский учет», «Математика» и другие;

- **предполагают** осуществление связи изучаемой студентом новой информационно-экономической деятельности с его имеющимся личным опытом;

- **предполагают** применение активных методов обучения для формирования информационно-экономических умений и навыков;

- **предполагают** осмысление полученных знаний и результатов практической деятельности в процессе работы на компьютере.

Дисциплина «Информатика в экономике» направлена на получение практических навыков использования компьютерных технологий и формирование профессиональных компетенций будущих экономистов.

Нами это осуществляется в процессе выполнения на компьютере соответствующих задач по будущей специальности студентов.

Рассмотрим технологию процесса овладения и закрепления знаниями на основе предлагаемых студенту заданий, при котором формируются профессиональные компетенции будущего специалиста в экономической области. Например, перед студентами ставится проблемное задание, предполагающее

- 1) иметь понятие о *решении уравнений* по дисциплине *математика*;
- 2) знать *возможности программных средств* персонального компьютера, например Excel по решению уравнений;
- 3) *уметь анализировать* полученные результаты с позиции *экономического* смысла найденного решения уравнения;

4) *визуализировать* найденное решение через графическое представление, по дисциплине *информатика в экономике*.

Рассмотрим следующую Задачу 1: *Нужно определить, какую сумму кредита можно взять под 18% годовых с ежемесячным начислением процентов в конце периода, если выплачивать мы можем на протяжении двух лет с периодическим ежемесячным платежом в 500 сом и в итоге готовы выплатить 300 000 сом.*

В Excel решение поставленной задачи предполагает знание финансовых функций. Используя финансовую функцию ПС, вычисляющую общую сумму будущих выплат (для погашения величины выданного кредита) с заданными условиями задачи, получаем, что величина кредита:

=ПС(18%/12;2*12;-500;-300000;0) составляет 219878,38 сом.

Допустим, что для реализации задуманного проекта суммы 219 878 сом недостаточно, а необходима сумма в 250 000 сом. Увеличение суммы кредита может быть достигнуто за счет изменения условий договора. А именно, или должна быть изменена *процентная ставка*, или *срок кредита*, или *периодический платеж*. В данном случае изменение будущей суммы кредита не рассматриваем.

Для подобного анализа и принятия решения воспользуемся командой Excel-а **Данные - «анализ что если» - «Подбор параметра»**. Используя команду «Подбор параметра», будем поочередно задавать искомыми величинами значения *процентной ставки*, *срока кредита* и *величины периодического платежа* для поиска таких их значений, при которых возможно получение суммы кредита 250000 сом.

Создадим модели решения уравнений, обеспечивающие получение суммы кредита в 250000 сом.

=ПС(C6/12; 2*12;-500;-300000;0) – ищем *процентную ставку*;

=ПС(18%/12; A10*12;-500;-300000;0) – ищем *срок кредита*;

=ПС(18%/12;2*12;-A13;-300000;0) – ищем *величину периодического платежа*.

Используя «Подбор параметра» получаем, что кредит в 250 000 сом можно получить при уменьшении годовой процентной ставки до 11%; уменьшении срока выплаты кредита до 1,16 года; увеличении периодического платежа до 2003,8 сом в месяц.

Список использованных источников

1. Панкова Г.Д. Технология обучения компьютерным методам в экономике / Монография. – LAP Lambert Academic Publishing, - 2016. – 97 с. ISBN 978-3-659-82892-8

2. Панкова Г.Д., Мамбеталиева М.Б., Аманбаева Ч.Ш. Экономикалык эсептер үчүн компьютердик ыкмалар. Mathcad чөйрөсүндөгү финансылык функциялар: окуу куралы = Компьютерные методы для экономических расчетов. Финансовые функции в среде MathCad: учебное пособие. – Б.: 2016.– 78 с. Текст кыргызча, орусча. ISBN 978-9967-32-179-3

MSC 91F20

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И КОМАНД

Баячорова Б.Ж., Карабаева С.Ж.

КНУ им. Ж.Баласагына, Институт математики НАН КР

Мурда авторлордун бирөөнүн катышуусунда “таасир этилүүчү объект” түшүнүгү аныкталып жана “тил”, “команда” түшүнүктөрү такталган. Ошонун негизинде, лингвистикалык эксперименттерди жана студенттердин командалык таймаштарын өткөрүү, компьютерде ишке ашыруу тажрыйбаларын эске алуу менен бул макалада “такталбаган (анык эмес) тапшырма (команда) түшүнүгү аныкталып жана “тапшырмалардын (командалардын) эквиваленттүүлүгү” түшүнүгү математикалык тексттердин мисалында такталган.

Урунттуу сөздөр: таасир этилүүчү объект, тил, тапшырма, математикалык текст, эквиваленттүүлүк.

Ранее с участием одного из авторов было введено понятие «перманентно неустойчивый объект» и уточнены понятия «язык» и «команда». На этой основе, с учетом опыта проведения лингвистических экспериментов и командных соревнований студентов и компьютерной реализации, в статье введено понятие «неопределенность задания (команды)» и уточнено понятие «эквивалентность заданий (команд)» на примере математических текстов.

Ключевые слова: перманентно неустойчивый объект, язык, задание, команда, математический текст, эквивалентность

Earlier, with participation of one of the authors, the notion of “permanently instable object” was introduced and the notions of “language” and “order” were refined. On this base, taking into account experience of conducting linguistic experiments and students’ team competitions and computer implementation, the notion of “uncertainty” is introduced and the notion of “equivalence of tasks (orders)” is refined on examples of mathematical texts in the paper.

Keywords: permanently instable object, language, task, order, mathematical text, equivalence

1. Введение. Вопросы эквивалентности текстов на естественных, алгоритмических и смешанных языках имеют важное значение в различных сферах человеческой деятельности: информатике (computerscience), переводе и связанных с ними: проведении экзаменов и соревнований на нескольких языках; в области юриспруденции, международных отношений.

Примечание. Под смешанным языком мы понимаем использование как текстов (команд) на естественных языках, так и формальных логических операций (например, язык блок-схем, команды работы с компьютером и др.).

Возникает вопрос о более строгих определениях понятия эквивалентности текстов (команд).

Как написано в [1], “ В переводе нередко встречается тезис о том, что главным определяющим принципом эквивалентности текста является коммуникативно-функциональный признак, который складывается из равенства коммуникативного эффекта (воздействие, произведенное на получателя в результате передачи сообщения).» Сам автор предлагает комплексный подход, с участием данного понятия.

[2] «С функционально-коммуникативным подходом сходна интерпретация эквивалентности как категории операциональной, когда главным критерием равноценности считается реакция получателей исходного и переводного текстов».

Такие критерии нельзя проверить объективно.

Вместе с тем, введенные нами определения «языка» и сопутствующих понятий и их реализация на компьютере, проведенные эксперименты с носителями языка, проведенные командные соревнования по объективной

оценке качества перевода дают возможность дать более строгие критерии для некоторых типов высказываний. Мы будем рассматривать более узкий класс текстов (команд): задания по математике и программы на алгоритмических языках.

2. Основные определения. Одним из главных направлений современной информатики является построение компьютерных представлений всех известных реальных и виртуальных объектов. Известно, что более эффективным является интерактивное представление объектов, поскольку оно дает пользователю возможность самому выбирать способы изучения объекта.

Изучение тех или иных языков часто сопровождается использованием компьютерных программ, которые базируются на основном язык обучающегося с использованием текстов на двух языках или толкового словаря, где одни слова определяются через другие.

Следующие определения введены в [3]-[10]. Нами введено понятие: «независимое» представление – такое, что для него не требуется знание других подобных объектов (в частности, при изучении естественного языка - использование других языков).

Определение 1. Если малые по затратам энергии воздействия на объект вызывают существенно различные изменения во внутреннем состоянии объекта и большие по затратам энергии действия объекта, то такой (постоянно неустойчивый) объект называется «таасир этилүүчү» объект (для данного выражения нам не удалось подобрать краткий эквивалент на русском языке) или субъект.

Такое целенаправленное, малое по затратам энергии воздействие на субъект называется командой.

Примечание. Действия субъекта производятся за счет его внутренней энергии. Энергия поступает в субъект из других источников.

Данное определение объединяет людей и компьютеры.

Определение 2. Система команд, при помощи которых один субъект может добиваться от другого субъекта желаемых достаточно многообразных действий, называется универсальным языком.

Данное определение объединяет естественные и универсальные алгоритмические языки.

3. Новые определения. Следующее сформулировано на основе нашего опыта проведения различных экзаменов и соревнований. Оно не является новым в полном смысле, поскольку в литературе имеется достаточно много подобных определений, но нами используется:

Определение 3. Задание субъекту – это комплекс из трех частей:

- представление ситуации из предметной области данной дисциплины, требующей каких-либо действий;
- средства, которые может использовать субъект при выполнении действий;
- средства, объективно (имеется в виду: не «мнение экзаменатора или жюри») воспринимающие действия субъекта и оценивающие их на соответствие требованиям.

На основе [11]-[13] предлагается ввести понятие «неопределенность задания» - диапазон различных действий, все из которых являются адекватными корректно поставленному заданию.

Неопределенности заданий можно разделить на

- устранимые (например, команда

«начертите отрезок длиной пять см» (1)

- нужно добавить слово «горизонтальный»:

- «начертите горизонтальный отрезок длиной пять см»; (2)

такую неточность часто делают участники командных соревнований);

- неустранимые (то есть такие, что для их устранения требуется по существу другая команда).

Причины неустранимости неопределенности в заданиях многообразны. Среди них можно выделить:

- нечеткость в естественных языках [14];

- выявленную нами дискретность в понимании слов «астында», «сол жагында» и т.д. для объектов сложной формы, связанную с интуитивным употреблением кванторов существования и всеобщности [11].

Для ослабления неопределенности в заданиях мы используем достаточно большой дискретный набор возможных действий (но не 3 - 5, как в тестировании с закрытыми ответами).

Предлагается следующее:

Определение 4. Две команды (задания) являются эквивалентными, если диапазоны соответствующих действий (см. Определение 3) совпадают.

В том числе: частично эквивалентными, если совпадение имеет место в данной ситуации; полностью эквивалентными, если совпадение имеет место в любой ситуации, где задания имеют смысл.

Приведем примеры, показывающие сложность введенных определений.

«Начертите горизонтальный отрезок длиной пятьдесят мм» (3)
полностью эквивалентна (2).

«Начертите горизонтальный отрезок длиной (562*693–389416) мм» (4)
эквивалентна (2) только при наличии калькулятора, иначе ее выполнение занимает значительно больше времени.

«Узундугу беш см болгон кесинди тарткыла» (5)
эквивалентна (2) только для людей, знающих и кыргызский, и русский языки.

Авторы благодарят студентов и преподавателей, принимавших участие в экспериментах, и студентов, принимавших участие в командных соревнованиях по объективной оценке качества перевода.

Аналогичные определения можно ввести для компьютерных программ, написанных на разных алгоритмических языках.

Список использованных источников

1. Виноградов В. С. "Введение в переводоведение (общие и лексические вопросы)". - Москва: Издательство института общего среднего образования РАО, 2001. - 224 с.

2. <http://www.refegrad.ru/index.php?id=684>

3. Панков П.С., Баячорова Б.Ж. Компьютерные подмножества естественных языков // Труды Центра информационных систем и технологий в управлении / Вестник КНУ им. Жусупа Баласагына: серия 6. Естественно-технические науки. - Выпуск 3. Информационные технологии. – Бишкек: КНУ, 2005. - С. 5-10.

4. Панков П.С., Баячорова Б.Ж. Кыргыз тилинин негиздерин компьютерде көз карандысыз көрсөтүү // Известия Ош ТУ им. М.М.Адышева, 2008, № 1. – С. 268-272.

5. Панков П.С., Баячорова Б.Ж. Кыргыз тилин компьютерде көрсөтүү каражаттары // Ж. Баласагын атындагы КУУ жарчысы: Серия 3. Табигый-техникалык илимдер. Чыгарылышы 4(8). Математика. Информатика. Кибернетика. – Бишкек: КУУ, 2009. – 163-172-б.

6. Панков П., Баячорова Б., Жураев М. Кыргыз тилин компьютерде чагылдыруу: монография. – Бишкек: Турар, 2010. – 172 б.

7. Баячорова Б.Ж., Панков П.С. Кыргыз тили боюнча компьютердеги расмий экзамендин курамы // Известия КГТУ им. И.Раззакова, № 24, 2011 / Инновационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании: материалы Международной конференции, посвященной 70-летию академика А.Жайнакова. – С. 370-374.

8. Pankov P.S., Bayachorova B.J., Juraev M. Mathematical Models for Independent Computer Presentation of Turkic Languages // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 3, No.1, 2012. – Pp. 92-102.

9. Pankov P., Bayachorova B. Occam's razor in mathematical models of notions of Turkic languages // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Ed. by Acad. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 155-158.

10. Bayachorova B.J., Pankov P.S. Mathematical models for independent computer presentation of complex expressions in natural languages // Вестник КРСУ, серия естественные и технические науки, 2016, том 16, № 5. – С. 19-21.

11. Карабаева С. Единый алгоритм словоизменения и представление пространства в кыргызском языке. – Saarbrücken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2016. – 62 с.

12. Pankov P.S., Karabaeva S.J. Mathematical and computer models of spatial concepts in Kyrgyz language // Интернет-журнал ВАК КР, 2016, № 3. – 7 с.

13. Karabaeva S.J., Pankov P.S. Independent computer presentation of spatial notions in Turkic languages // Пятая Международная конференция по компьютерной обработке тюркских языков «TurkLang 2017». – Труды конференции. Том 1. – Казань: Издательство АН Республики Татарстан, 2017. - С. 68-78.

14. Zadeh L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning // Information Sciences, 1975, Vol. 8, pp. 199-249, 301-357; Vol. 9, pp. 43-80.

MSC 49M37

ЗАДАЧА СОСТАВЛЕНИЯ КОМБИНИРОВАННОГО КОРМА ПО ОПРЕДЕЛЕННЫМ ТРЕБОВАНИЯМ К ПИТАТЕЛЬНОСТИ

Эшенкулов П., Жусупбаев А.

*Академия государственного управления при президенте КР
Институт математики НАН КР*

Тамак азыкка анык бир талабы коюулуп аралашмадан турган тоютту түзүүгө кеткен чыгым эң бир аз болуу маселесинин математикалык модели жазылган. Түзүлгөн моделдин жарамдуулугун көрсөтүү үчүн атайын түзүлгөн мисал келтирилген.

Урунттуу сөздөр: чыгым, ингредиент, тамакка керектуу зат, нарк, рацион, аралашмадан турган тоют.

В работе сформулирована математическая модель задачи составления комбинированного корма по определенным требованиям к питательности по критерию минимума суммарных затрат. Для проверки пригодности модели приводится тестовый пример.

Ключевые слова: расход, ингредиент, питательное вещество, стоимость, рацион, комбинированная корма, смесь.

A mathematical model of the problem of compiling a combined feed that satisfied to the certain nutritional requirements is formulated. The nutritional requirements are constructed by using the minimum total cost criteria. The example is given for testing of model.

Keywords: consumption, ingredient, nutrient, cost, diet, combined feed, mixture.

Хозяйствующий субъект содержит на откорм Q голов крупного рогатого скота одинакового возраста. Которые за T недели достигают своего максимального веса и направляется в убойный цех. Предполагаем, что в среднем недельный расход корма на одного животного составляет δ кг.

Для того чтобы содержащиеся животные достигли T недели необходимого кондиции, кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси m различных видов кормов или ингредиентов. Приведем данные, характеризующие содержание единицы веса каждого j -го, $j = 1, 2, \dots, n$ питательного вещества в каждом из ингредиентов и их удельную стоимость в виде таблицы 1, где a_{ij} – содержание питательного вещества j -го вида в единице объема i -го вида ингредиента (корма).

Требование к питательности рациона считаем известным, т.е. комбинированный корм (смесь) должна содержать: не менее $\beta'_j\%$, и не более $\beta''_j\%$ питательного вещества j -вида $j=1, 2, \dots, n$.

Таблица 1

ингредиент	содержание питательных веществ в единице объема ингредиента (кг)				стоимость сом/кг
	1 (кальций)	2 (белок)	...	n (клетчатка)	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	c_2
...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	c_m

Обозначим через x_i содержание i -го вида ингредиента (в кг) в кормовой смеси $i, i=1, 2, \dots, m$.

Требуется определить объем каждого вида ингредиента, $x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m$ образующих кормовую смесь доставляющие минимума суммарных затрат при заданной питательности.

Математическая модель задачи. Определим общий вес кормовой смеси, еженедельно расходуемой на кормление Q голов крупного рогатого скота на мясо, т.е. $Q \delta = \Delta$ кг. Так как, $\sum_{i=1}^m x_i$ общий вес кормовой смеси, то оно должен удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^m x_i \geq \Delta.$$

Теперь сформулируем ограничения по питательности кормовой смеси.

Так как общий расход кормов в единице равен $\sum_{i=1}^m x_i$, то содержание j -го питательного вещества должно находиться в пределах от $\lambda'_j \sum_{i=1}^m x_i$ до $\lambda''_j \sum_{i=1}^m x_i$, где $\lambda'_j = \delta\beta'_j/100$, $\lambda''_j = \delta\beta''_j/100$, $j=1,2, \dots, n$.

В соответствии с данными таблицы 1 запишем ограничения по каждой $j=1,2, \dots, n$ питательности кормовой смеси

$$\sum_{i=1}^m (a_{ij} - \lambda'_j) x_i \geq 0, j=1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m (a_{ij} - \lambda''_j) x_i \leq 0, j=1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, математическая модель задачи составления оптимального кормового смеси для откорма крупного рогатого скота на мясо по минимальной стоимости можно представит в виде:

найти минимум

$$L(x) = \sum_{i=1}^m c_i x_i \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m x_i \geq \Delta, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m (a_{ij} - \lambda'_j) x_i \geq 0, j=1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m (a_{ij} - \lambda''_j) x_i \leq 0, j=1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Для решения задачи (1)-(5) может быть использовано способ предложенный в работе[1].

Пример. Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Хотя недельный расход

корма для цыплят зависит от их возраста, в дальнейшем будем считать, что в среднем он составляет 0,5 кг.

Для того чтобы цыплята достигли к восьмой неделе необходимых кондиций, кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингредиентов. Обычно перечень ингредиентов достаточно широк, но для того, чтобы проиллюстрировать процесс построения модели, ограничимся только тремя ингредиентами: известняком, зерном и соевыми бобами. Требования к питательности рациона сформулируем также в упрощённом виде, учитывая только три вида питательных веществ: кальций, белок и клетчатку.

таблица 2

Ингредиент	Содержание питательных веществ в единице ингредиента (кг)			Стоимость, сом./кг
	кальций	белок	клетчатка	
Известняк	0,38	-	-	0,04
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,15
Соевые бобы	0,002	0,50	0,08	0,40

В таблице 2 приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента. Заметим, что известняк не содержит ни белка, ни клетчатки.

Смесь должна содержать:

- 1) не менее 0,8%, но не более 1,2% кальция;
- 2) не менее 22% белка;
- 3) не более 5% клетчатки.

Для птицеводческой фермы требуется определить количество (кг) каждого из трех ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и ее питательности.

Сформулируем числовая модель задачи.

Введем следующие обозначения:

x_1 — объем известняка (в фунтах) в смеси,

x_2 — объем зерна (в фунтах) в смеси,

x_3 — объем соевых бобов (в фунтах) в смеси.

Сформулируем ограничения задачи.

Определим общий вес смеси, еженедельно расходуемой на кормление 20000 цыплят: $20000 \cdot 0,5 = 10000$ кг. Так как, x_1 , x_2 и x_3 представляют веса трех ингредиентов, используемых для составления смеси, общий вес смеси будет равен $x_1 + x_2 + x_3$ и должна быть

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 10000 \text{ кг.} \quad (6)$$

Теперь обратим внимание на требования, предъявляемые к смеси с точки зрения питательности. Так как общий расход кормов равен $x_1 + x_2 + x_3$, содержание кальция, должно находиться в пределах от $0,004(x_1 + x_2 + x_3)$ до $0,006(x_1 + x_2 + x_3)$. В соответствии с данными таблицы 2 содержание кальция, обусловленное включением в смеси x_1 фунтов известняка, x_2 фунтов зерна и x_3 фунтов соевых бобов, равно $0,38x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3$. Отсюда следует, что ограничения, связанные с содержанием кальция в кормовом рационе, можно представить в следующем виде:

1. Смесь должна содержать не менее 0,8% кальция:

$$0,38x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 \geq 0,004(x_1 + x_2 + x_3). \quad (7)$$

2. Смесь должна содержать не более 1,2% кальция:

$$0,38x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 \leq 0,006(x_1 + x_2 + x_3). \quad (8)$$

Из (7), (8) получим:

$$0,376x_1 - 0,003x_2 - 0,002x_3 \geq 0, \quad (9)$$

$$0,374x_1 - 0,005x_2 - 0,006x_3 \leq 0. \quad (10)$$

Также напишем аналогичное неравенство для белка и клетчатки:

$$0,09x_2 + 0,50x_3 \geq 0,11(x_1 + x_2 + x_3), \quad (11)$$

$$0,02x_2 + 0,08x_3 \leq 0,025(x_1 + x_2 + x_3). \quad (12)$$

Таким образом, получим числовую модель задачи

$$L(x) = 0,04x_1 + 0,15x_2 + 0,40x_3 \rightarrow \min \quad (13)$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 10000, \\ 0,376x_1 - 0,003x_2 - 0,002x_3 &\geq 0, \\ 0,374x_1 - 0,005x_2 - 0,006x_3 &\leq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 0,11x_1 + 0,020x_2 - 0,390x_3 &\leq 0, \\ 0,025x_1 + 0,005x_2 - 0,055x_3 &\geq 0, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (15)$$

Сформулированная задача об оптимальном кормлении 20000 цыплят фирмы приводилась к нахождению неизвестных x_1, x_2, x_3 , которые удовлетворяли бы системе неравенств (14) и (15) и предоставляли бы целевой функции (13) минимальное значение.

Поставленная задача решена составленной программой нами на языке *PascalABC*[2]. После запуска программы с выше указанными данными получили следующее оптимальное решение:

$$x_1 = 133.290; \quad x_2 = 9349.646; \quad x_3 = 517.064. \quad L(x) = 1614.604.$$

Таким образом 8-недельный оптимальный рацион в полученных количествах для 20000 цыплят составит 1614.604 сомов.

Список использованных источников

1. Эшенкулов П., Жусупбаев А. и др. Методика решения задач линейного программирования на компьютере. - Ош, 2004.-61 с.
2. Эшенкулов П., Жусупбаев А. Решение общей задачи линейного программирования. Программа на языке PascalABC. Свидетельство Кыргызпатента №1030 (Учебное пособие). Зарегистрировано в Государственном реестре КР объектов авторского права 2 мая 2008 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ МИНИМИЗАЦИИ ПРИРАЩЕНИЯ ЭНТРОПИИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЕ

Акерова Дж., Кененбаев Э., Маратова А.М.

Институт математики НАН КР, КРАО

Буга чейинки иштерде (мисал учун, [2], [5]) кандайдыр бир жетишкендиктер болсо да энтропиянын өсүүсүнүн минималдаштыруу маселеси коюлган. [1] жана төмөндө каралган процесстердин жыйынтыгынын негизинде энтропия тууралуу гипотеза сунушталган. Чекитти чектелген тездетүүдө жана токтотууда энтропиянын өсүүсүнүн так баасы алынган.

Урунттуу сөздөр: Энтропия, энтропиянын өсүүсү, гипотеза, баа.

Ранее в ряде работ (например, [2], [5]) ставился вопрос о минимизации приращения энтропии при достижении некоторых целей. На основании анализа рассмотренных процессов ниже и в [1] выдвинуты гипотезы об энтропии. Получена точная оценка возрастания энтропии при ограничениях на ускорении и торможении точки.

Ключевые слова: Энтропия, приращение энтропии, гипотеза, оценка.

Earlier in several papers (e.g. [2], [5]) the question on minimizing of the entropy increment in the achievement of some goals was arisen. Based on the analysis of the processes discussed in this paper and in [1] the hypotheses on entropy have been put forward. An accurate estimate of the entropy increment is obtained with limited acceleration and braking of the point.

Key words: Entropy, entropy increment, hypothesis, estimate.

Введение. На основании многих экспериментов, ранее было постулировано, что тепло переходит от более теплых компонент системы к более холодным, но не наоборот. Нами была поставлена и рассмотрена задача минимизации приращения энтропии при достижении некоторых целей и задача разработки общей методики исследования и доказательства существования вместе с установлением свойств решений нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, выдвинуты гипотезы об энтропии. Такая методика необходима для получения количественных оценок снизу для возрастания энтропии в почти замкнутых системах, описываемых дифференциальными уравнениями с управлением. Изложены второй закон термодинамики и гипотезы об оценке снизу для возрастания энтропии. Практическое значение этого закона состоит, в частности, в том, что приращение энтропии в некотором смысле соответствует понятию загрязнения окружающей среды.

1.Необходимые сведения и гипотезы об энтропии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см., например, [3]). Энтропия H - это функция состояния термодинамической системы, определяющая меру необратимого рассеивания энергии. Ее изменение определяется согласно формуле

$$\Delta H = \sum \frac{\Delta Q}{\Theta} \quad (1)$$

где ΔQ - количества переданной тепловой энергии или энергии, необратимо перешедшей в тепловую, Θ - абсолютные температуры, при которых происходят передачи или превращения энергии; суммирование производится по всем процессам, происходящим в системе одновременно.

При передаче тепла внутри системы правая часть соотношения (1) содержит как положительные, так и отрицательные слагаемые (каждая передача от одного тела к другому дает два слагаемых с разными знаками), при переходе других видов энергии в тепло - только положительные слагаемые.

На основании многих экспериментов, доказывающих, что тепло переходит от более теплых компонент системы к более холодным, но не наоборот, и в [1] формализована

ГИПОТЕЗА 1 (второй закон термодинамики). В замкнутых системах (в которых нет обмена энергией с окружающей средой) изменение ΔH энтропии может быть только положительным (приращение энтропии).

В [4] предложена следующая ситуация. Пусть имеется физическая замкнутая система. Пусть в данный момент она находится в стационарном состоянии A и есть возможность перехода в другое стационарное состояние B .

Для частного случая такого перехода (движение в вязкой жидкости) в [6] отмечено, что необходимые затраты энергии (т.е. переход ее в тепловую) и тем самым приращение энтропии увеличиваются при уменьшении времени перехода.

На основании анализа нескольких процессов в [4] была выдвинута

ГИПОТЕЗА 2. Существует такой отрезок времени T_0 (адиабатическое время системы), зависящий только от начального состояния системы, что для

любого $T < T_0$ приращение энтропии ΔH в системе не меньше некоторой положительной величины при любом переходе от состояния A к состоянию B за время T . Существует также такая константа C_0 , что $\Delta H \geq \frac{C_0}{T^2}$ (размерность C_0 – масса $\times$ длина $\times$ длина / температура).

ПРИМЕЧАНИЕ. Если исходить из принципа детерминизма, то в замкнутой системе есть только один сценарий будущего, то есть не могут существовать различные возможности переходов. Поэтому в [6] выдвинуто предположение, что различные возможные действия внутри системы, переводящие ее из состояния A в состояние B , задаются некоторым внешним воздействием (управлением) достаточно малой (пренебрежимо малой) энергии. Такая система названа "почти замкнутой".

Также предложена более конкретная формулировка гипотезы.

Пусть в некоторой инерциальной системе координат в момент времени t_1 в этой системе некоторая материальная точка массы m неподвижна и в момент времени $t_2 = t_1 + T$ она также неподвижна и находится на расстоянии X от начального положения.

ГИПОТЕЗА 2а. Существуют такие отрезок времени T_0 (адиабатическое время системы), и такая константа G_0 , зависящие только от начального состояния системы, что для любого $T < T_0$ приращение энтропии ΔH в системе не меньше $\Delta H \geq \frac{G_0 m X^2}{T^2}$ (размерность G_0 – 1 / температура).

2. Постановка задачи о минимизации приращения энтропии. Используем формулу для работы $A = S \cdot F$, для мощности:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{|dS| \cdot |F|}{dt} = |V| \cdot |F|,$$

где A – работа, F – сила, S – путь, V – скорость, и другую формулу для работы:

$$A = \int \frac{dA}{dt} dt = \int P dt. \quad \text{Тогда } A = \int |V| \cdot |F| dt.$$

Для решения поставленной задачи сначала рассмотрим задачу с одной материальной точкой.

Ранее мы предполагали, что имеются неограниченные возможности, как ускорения, так и торможения точки единичной массы, и при торможении вся энергия переходит в тепло. Сначала точка неподвижна. Необходимо передвинуть ее за время T на расстояние L так, чтобы она тоже после передвижки была неподвижна. Сохраним те же обозначения для функции положения точки $u(t)$, управляющей функции $v(t)$ и функционала I .

Так мы получили следующую задачу оптимального управления: дифференциальное уравнение

$$u''(t;v)=v(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(0;v)=u'(0;v)=0; \quad u(T;v)=L, \quad u'(T;v)=0. \quad (2)$$

Требуется минимизировать функционал, показывающий количество энергии, перешедшей в тепло, т.е. выделившейся при торможении.

Очевидно, что для получения наилучшего результата скорость ($u'(t)$) должна быть неотрицательной; сначала должно быть ускорение ($u''(t)>0$), а потом – замедление ($u''(t)<0$).

Тогда получаем:

$$I(v(t):t) := \int_0^T u'(s;v) \max\{0, -u''(s;v)\} ds. \quad (3)$$

Из (1)-(2) находим

$$u'(t) = \int_0^t v(s) ds = - \int_t^T v(s) ds; \quad (4)$$

$$u(t) = \int_0^t u'(s) ds = \int_0^t (t-s)v(s) ds. \quad (5)$$

Из (4) следует, что

$$\int_0^T v(s) ds = 0 \quad (6)$$

Из (5) и (2) следует

$$\int_0^T (T-s)v(s)ds = L. \quad (7)$$

Подставляем (4) в (3):

$$I(v(t):t) := \int_0^T \int_s^T v(w)dw \max\{0, -v(s)\}ds. \quad (8)$$

Таким образом, требуется найти оценку снизу для функционала (8) с условиями (6) и (7).

Заменим $s=TS$, $V(S) = v(TS) T^2/L$ ($0 \leq S \leq 1$). Тогда эти условия принимают вид:

$$\int_0^1 V(S)dS = 0 \quad (9)$$

$$\int_0^1 (T-TS)v(TS)TdS = L, \quad \int_0^1 (1-S)V(S)dS = 1 \quad (10)$$

Соответственно, (8) с заменой $w=TW$ принимает вид:

$$\begin{aligned} I(v(t):t) &:= \int_0^1 \int_s^1 v(TW)TdW \max\{0, -v(TS)T\}dS = \\ &= \int_0^1 \int_s^1 V(W)L/T^2dW \max\{0, -V(S)L/T^2\}TdS = \\ &= L^2/T^2 \int_0^1 \int_s^1 V(W)dW \max\{0, -V(S)\}dS. \end{aligned} \quad (11)$$

Существует такая точка $Z \in (0, 1)$, что

$$V(S) = \begin{cases} V_+(S) \geq 0 & (0 \leq S \leq Z) \\ -V_-(S) \leq 0 & (Z \leq S \leq 1) \end{cases}.$$

Тогда (11) принимает вид

$$I(v(t):t) := L^2/T^2 \int_Z^1 \int_s^1 V_-(W)dW V_-(S)dS. \quad (12)$$

Обозначим C_0 — минимально возможное значение следующего функционала для безразмерной функции $V(S)$:

$$I(V(S):S) := \int_Z^1 \int_S^1 V_-(W) dW V_-(S) dS. \quad (13)$$

при условиях (9)-(10). Тогда из (12) получаем

$$I(v(t):t) \geq \frac{L^2}{T^2} \cdot C_0 \quad (14)$$

Найдем оценки для абсолютной константы C_0 .

При неограниченном ускорении и замедлении нами была доказана
ТЕОРЕМА. Имеет место оценка

$$I(v(t):t) \geq \frac{1}{2} \frac{L^2}{T^2} \quad (15)$$

И правая часть сколь угодно близка к $\frac{1}{2}$. Точность этой оценки была продемонстрирована на функции

$$V_q(S) := 2^{q+1}(q+2) \left(\frac{1}{2} - S \right)^q, \quad (16)$$

где q – нечетное натуральное число ($Z = \frac{1}{2}$).

Рассмотрим теперь ограничение на управляющую функцию:

$$|u(t)| \leq k = \text{const} > 0. \quad (17)$$

Замена $V(S) = v(TS) T^2/L$ соответственно дает константу $K = kT^2/L$.

Из вида функции (16) возникает предположение, что минимум функционала (13) достигается для функции вида

$$V_a(S) = \begin{cases} K & (0 \leq S \leq a) \\ 0 & (-a \leq S \leq 1-a) \\ -K & (1-a \leq S \leq 1), \end{cases}$$

где $a \leq 1/2$ - некоторая константа, зависящая от K .

Равенство (9) выполняется в силу симметрии. Уравнение (10):

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-S) V_a(S) dS &= \int_0^a (1-S) K dS - \int_{1-a}^1 (1-S) K dS = \\ &= K \left(a - \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} a^2 \right) = K(a - a^2) = 1. \end{aligned}$$

Отсюда $a = \frac{1}{2K} (K - \sqrt{K^2 - 4K})$.

Таким образом, чтобы точке дойти до конечного положения, должно быть $K \geq 4$, тогда будет $a \leq \frac{1}{2}$.

Подставляя в (13), получаем:

$$I(V_a(S):S) = \frac{1}{2} \left(\int_{1/2}^1 V_a(S) dS \right)^2 = \frac{1}{2} (Ka)^2 = C_K := \frac{1}{8} (K - \sqrt{K^2 - 4K})^2.$$

Имеют место соотношения: $C_K > \frac{1}{2}$, поскольку $\frac{1}{4} (K - \sqrt{K^2 - 4K}) > 1$,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} C_K = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует гипотеза, что эта оценка - точная.

Список использованных источников

1. Акерова Дж.А. Кандидатская диссертация на тему «Нелинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных и особенности их решений» по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.- Бишкек, 2016. - 87 с.
2. Лунев В.В. Течение реальных газов с большими скоростями. — Москва: Физматлит, 2007. — 759 с. (§ 3.6. Волновые потери).
3. Мартин Н., Ингленд Дж. Математическая теория энтропии. — Москва: Мир, 1988. — 350 с.
4. Панков П.С. Адиабатические показатели замкнутых систем //Вестн. Кырг. нац. ун-та им. Ж. Баласагына. Сер. 3: Естественно-техн. науки. Физика и физ. образование. — 2003. — С. 146-147.
5. Панков П.С., Акерова Дж.А. Интервальные неравенства для дифференциальных уравнений с управлением в модели возрастания энтропии в почти замкнутых системах //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. — Бишкек, 2014. — Вып. 46. —С . 82-86.
6. Landauer R., Bennett C. H. The Fundamental Physical Limits of Computation // Scientific American. — 1985. — July. — P. 48-56.

**ИНДУКТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ
РАЗМЕРНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ****Жораев А. Х.***Кыргызско-Узбекский университет*

Бул иштин максаты мейкиндикте татаал кыймылдоонун түшүнүгүндө негизделген жаңы аныктамаларды берүү. Мейкиндикте кесиндини жылдыруу аркылуу мейкиндиктин экинчи ченемдүү мейкиндиктин аныктамасы берилет, экинчи ченемдүү көптүктү жылдыруу аркылуу мейкиндиктин үчүнчү ченемдүү мейкиндиктин аныктамасы берилет, ж.у.с. мейкиндиктин каалаган ориентациялык ченеми үчүн.

Урунттуу сөздөр: топологиялык мейкиндик, кинематикалык мейкиндик, кыймылдоо, ченем

Цель настоящей работы - дать новые определения, основанные на понятии сложного движения в пространстве. Через движение отрезка в пространстве дается определение двумерного пространства, через движение двумерного множества - определение трехмерного пространства, и т.д. для любой ориентационной размерности пространства.

Ключевые слова: топологическое пространство, кинематическое пространство, размерность, движение

The goal of this work is to introduce new definitions based on conception of compound motion in a space. The definition of two-dimensional space is given by means of motion of a segment; one of three-dimensional space is given by means of motion of a two-dimensional set, etc. for any orientational dimension of a space.

Keywords: topological space, kinematical space, motion, dimension

Введение. В связи с развитием робототехники, во многих работах исследовалось движение, управляемое движение и движение с обратной связью для протяженных объектов в ограниченных подпространствах трехмерного евклидова пространства. В данной работе используется движение протяженных объектов в различных математических пространствах.

Понятие естественного движения (для одной точки) в топологическом пространстве, введенное в [1], дало возможность представить на компьютере в интерактивном режиме различные известные в математике неевклидовы пространства [2], [3]. Также было введено понятие разметки в пространстве [4], [5]. Были изучены, в том числе нами, различные свойства кинематических и размеченных пространств [6], [7]. С использованием движения более сложных объектов здесь изучаются новые понятия «сплошной ширины» пространства и «ориентационной размерности» пространства.

1. Обзор определений и полученных ранее результатов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. *Кинематическим пространством* называется множество G точек и множество K *маршрутов*. Каждый маршрут M – это пара, состоящая из положительного числа $T_M > 0$ (*время маршрута*) и функции $m_M: [0, T_M] \rightarrow G$ (*траектория маршрута*). Выполняются следующие аксиомы.

(K1) Для любых различных точек z_0, z_1 существует такой маршрут $M \in K$, что $m_M(0) = z_0$ и $m_M(T_M) = z_1$, и множество значений T_M для таких маршрутов M ограничено снизу положительным числом {передвижение между любыми точками возможно, но сколь угодно быстрое передвижение невозможно}.

(K2) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$, то также $\{T_M, m_M(T_M - t)\} \in K$ {всегда возможно движение в обратном направлении}.

(K3) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$ и $T^* \in (0, T_M)$, то также: $\{T^*, m^*(t) \equiv m_M(t) (0 \leq t \leq T^*)\} \in K$ {можно остановиться в любой момент}.

Маршруты, существующие в силу этой аксиомы, называются **подмаршрутами** маршрута M .

(K4) Если $\{T_1, m_1(t)\} \in K$, $\{T_2, m_2(t)\} \in K$ и $m_1(T_1) = m_2(0)$, то пара: число $T_{12} = T_1 + T_2$ и функция $m_{12}(t) = m_1(t) (0 \leq t < T_1)$; $m_{12}(t) = m_2(t - T_1) (T_1 \leq t \leq T_1 + T_2)$ также является маршрутом K {транзитивность}.

Для любой функции - траектории маршрута $m_M: [0, T_M] \rightarrow G$ множество ее значений называется **линией**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [5]. Если две точки топологического пространства имеют гомеоморфные окрестности, то они называются **локально однородными**.

Таким образом, топологическое пространство распадается на подпространства, каждое из которых содержит локально однородные между собой точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Топологическое пространство (X, τ) вместе с выделенным всюду плотным множеством $M \in X$ называется **размеченным**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Две локально однородных точки $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ называются различными по разметке M , если для любых гомеоморфных между собой окрестности V_1 точек x_1 и окрестности V_2 точек x_2 и любого гомеоморфизма $J: V_1 \rightarrow V_2$ образ $P(J)(V_1 \cap M) \neq V_2 \cap M$ (иными словами, ростки множества M по фильтрам окрестностей точек x_1 и x_2 различны).

Для подклассов класса топологических пространств вместо гомеоморфизмов в данном определении нужно взять морфизмы данного подкласса соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Топологическое пространство (X, τ) называется локально различным по разметке M , если любые две однородных точки из этого пространства являются локально различными по разметке M . Топологическое пространство (X, τ) называется локально различным, если существует такая разметка M , что оно является различным по этой разметке.

2. Определения движения в пространстве. Нами предложены [9]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть в топологическом пространстве G задано связное множество P . Будем говорить, что непрерывное отображение $F: P \times [0, T] \rightarrow G$ осуществляет **движение** множества P , если для фиксированного $t \in [0, T]$ отображение $F(z, t): P \rightarrow G$ является инъективным и $F(P, t)$ гомеоморфно P .

Для подклассов класса топологических пространств соответственно гомеоморфизм заменяется на изоморфизм в соответствующем пространстве.

Для большей гибкости для метрических пространств нами предложено

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Два ограниченных метрических пространства (два подмножества метрического пространства) A и B называются $[\alpha, \beta]$ -подобными ($0 < \alpha < 1 < \beta$), если существует биективное отображение $f: A \rightarrow B$ такое, что $\rho_B(f(x), f(y)) \in [\alpha, \beta] \rho_A(x, y)$ и $\rho_A(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \in [\alpha, \beta] \rho_B(x, y)$.

Соответственно, в метрическом пространстве вводится понятие **обобщенное движение с сохранением $[\alpha, \beta]$ -подобия**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Будем говорить, что непрерывное отображение (движение) $F: P \times [0, T] \rightarrow G$ осуществляет **обобщенный поворот** множества P вокруг его подмножества C с изменением ориентации, если

1) для всех $t \in [0, T]$ и $z \in C$ будет $F(z, t) \equiv z$;

2) для всех $t \in [0, T]$ и $z \in P \setminus C$ сужение $F: \{z\} \times [0, T] \rightarrow G$ будет маршрутом без самопересечений с начальной точкой z ;

3) для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$ и $z_1 \neq z_2 \in P$ будет $F(z_1, t_1) \neq F(z_2, t_2)$;

4) для всех $z \in P \setminus C$ будет $F(z, 0) \neq F(z, T)$;

5) множество $F(P, T)$ совпадает с множеством P .

Подмножество C будем называть **осью поворота**.

Возможность обобщенного поворота множеств некоторого типа обозначает нижнюю границу для размерности пространства, а невозможность - верхнюю границу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Если для некоторого числа $d > 0$ существует такой «отрезок» $z_1 - z_0 - z_2$ и его обобщенный поворот в отрезок $z_2 - z_0 - z_1$, что для всех $t \in [0, T_{12}]$ $\rho_K(m_1(t), m_2(t)) \geq d$, $\rho_K(z_0, m_1(t)) \leq d$, $\rho_K(z_0, m_2(t)) \leq d$, то будем говорить, что **сплошная ширина** (ориентационной размерности 2) кинематического пространства не меньше d .

Если в кинематическом пространстве $\rho_K(z_1, z_2) \geq d$; $\rho_K(z_2, z_3) \geq d$; $\rho_K(z_3, z_1) = d > 0$, то точка z_1 не может лежать на кривой длины меньше $2d$, соединяющей точки z_2 и z_3 . Действительно, предположим, что существуют такие $T < 2d$, $t_1 \in (0, T)$ и такой маршрут M , что $m(0) = z_2$, $m(t_1) = z_1$, $m(T) = z_3$. Обозначим его подмаршруты: m_2 , соединяющий точки z_2 и z_1 , и m_3 , соединяющий точки z_1 и z_3 . Число T равно сумме времен этих подмаршрутов. Но время каждого из них не меньше d , следовательно, $T \geq 2d$, что противоречиво.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Если никакое замкнутое множество в кинематическом пространстве не имеет сплошной ширины, то будем говорить, что **ориентационная размерность** такого пространства равна 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Если какое-нибудь замкнутое множество в кинематическом пространстве имеет сплошную ширину, но ни в каком таком множестве «треугольник» $z_1z_2z_3$ не может быть переведен обобщенным поворотом в «треугольник» $z_1z_3z_2$, то будем говорить, что ориентационная размерность такого пространства равна 2.

3. Общее определение ориентационной размерности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. (По индукции) Если в пространстве существует множество P с ориентационной размерностью n и его можно повернуть вокруг оси $C \subset P$ с ориентационной размерностью $(n-1)$, то будем говорить, что ориентационная размерность пространства не меньше $(n+1)$.

Если высказывание «ориентационная размерность пространства не меньше $(n+2)$ » неверно, то будем говорить, что ориентационная размерность пространства равна $(n+1)$.

В евклидовых пространствах обобщенный поворот совпадает с поворотом в геометрическом смысле.

Выводы. В статье показано, как вводятся новые понятия в теории кинематических топологических пространств при помощи движения более сложных объектов: обобщенный поворот, сплошная ширина, ориентационная размерность. Можно сопоставить эти определения с известными определениями размерности через покрытия и через «перегородки» для «сплошных» кинематических топологических пространств.

Список использованных источников

1. Борубаев А.А., Панков П.С. Компьютерные представления кинематических топологических пространств. – Бишкек: КГНУ, 1999. – 131 с.
2. Борубаев А.А., Панков П.С. Кинематическое изображение топологических пространств, представляемых в виде склейки // Вычислительные технологии (изд. СОРАН). – 1999, том 4, № 5. – С. 3-9.
3. Борубаев А.А., Pankov P.S., Chekeev A.A. Spaces Uniformed by Coverings. – Hungarian-Kyrgyz Friendship Society, Budapest, 2003. – 169 p.

4. Борубаев А.А., Панков П.С. Распознаваемость размеченных топологических пространств // Вестник КНУ, 2007. – Серия 3, выпуск 4. – С. 5–8.
5. Борубаев А.А., Панков П.С. Распознаваемость размеченных кинематических пространств // Вестник МУК, № 1(16), 2008. – С. 205-207.
6. Жораев А.Х. Распознаваемость в локально плоских кинематических пространствах // Вестник МУК, № 1(20), 2011. – С. 55-58.
7. Zhoraev A. Separable kinematical spaces are recognizable // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians / Ed. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 28-31.
8. Жораев А.Х. Исследование топологических пространств кинематическим методом. – Saarbrücken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2017. – 78 с.
9. Жораев А.Х. Методика кинематического исследования свойств топологических пространств // Вестник ОшГУ, специальный выпуск 3, 2018. - С. 263-265.

MSC 34E05

РАСШИРЕНИЕ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Жэнтаева Ж.К.

Кыргызско-Узбекский университет

Автор тапкан айырмалык теңдемелер системаларынын чыгарылыштарына симптотикалык ажыралышынын «атайын» жана «басаңдоо» чыгарылыштарына ажыратуунун жетиштүү шартынын жардамы менен чектүү кечигүүчү аргументтүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы маселелердин чыгарылыштары боюнча дал келген натыйжаларды мындай теңдемелердин кеңирээк класстарына кеңейтүүчү усул макалада сунушталган. Ал усул коэффициенттери мезгилдүү болгон теңдемелерге колдонулган.

Урунттуу сөздөр: айырмалык теңдеме асимптотика, кечигүүчү аргументтүү дифференциалдык теңдеме, теңдемелер системасы, мезгилдүү коэффициент.

С помощью найденных автором достаточных условий наличия асимптотического разложения решений систем двух разностных уравнений на «специальное» и затухающее решения в статье предложен метод расширения известных соответствующих результатов для

решений начальных задач для линейных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием аргумента для более широких классов таких уравнений. Этот метод применен к уравнениям с периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: разностное уравнение, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, специальное решение, начальная задача, асимптотика, периодический коэффициент

With assistance of found by the author sufficient conditions for existence of asymptotical expansion of solutions of systems of two difference equations into “special” and fading ones, a method to enlarge known corresponding results for solutions of initial value problems for linear differential equations with bounded delay of argument to wider classes of such equations is proposed in the paper. This method is applied to equations with periodic coefficients.

Keywords: difference equation, delay-differential equation, special solutions, initial value problem, asymptotic, periodic coefficient.

Введение. Рассмотрим линейный непрерывный оператор

$W(t, \varphi): R_+ \times \Phi \rightarrow R^k$, где Φ - некоторое (многомерное) линейное пространство,

$R_+ := [0, \infty)$, k - натуральное число. Рассматривается подпространство $\Phi_0 \subset \Phi$.

Распространяя терминологию [1], [2], будем называть объекты $\{W(t, \varphi): \varphi_0 \in \Phi_0\}$ *специальными*, если

$$(\forall t \in R_+)(\forall x \in R^k)(\exists \varphi_0 \in \Phi_0)(W(t, \varphi_0) = x) \quad (1)$$

и имеющими *асимптотическое свойство*, если

$$(\forall \varphi \in \Phi)(\exists \varphi_0 \in \Phi_0)(\lim_{t \rightarrow \infty} \|W(t, \varphi) - W(t, \varphi_0)\| = 0). \quad (2)$$

Для случая, когда $W(t, \varphi)$ – решение начальной задачи с начальным условием $\varphi \in C[-h, 0]$ для линейных дифференциальных уравнений с ограниченными коэффициентами и запаздыванием аргумента в ряде работ (см. обзор в [1], [2]) были найдены условия для выполнения (1) и (2).

Для уравнения с одним постоянным запаздыванием

$$z'(t) = P(t)z(t-h), \quad h \geq 0, \quad (3)$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad (4)$$

где $\varphi(t) \in C[-h, 0]$ и $P(t)$ - кусочно непрерывная – заданные функции, $|P(t)| \leq p_0 = \text{const}$, эти условия принимают вид

$$\|P(t)\| \cdot h < e^{-1} = 0.367..., \quad (5)$$

в некотором смысле эта оценка - неулучшаемая.

В связи с этими результатами мы выдвинули гипотезу о том, что аналогичные результаты должны иметь место для более фундаментальных – разностных уравнений, и что результаты, полученные для разностных уравнений, могут улучшить известные для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Мы обосновали эту гипотезу в [3], где установлено взаимно-однозначное соответствие между уравнениями вида (3) и системами разностных уравнений, причем условию вида (5) соответствует условие доминирования одного из диагональных коэффициентов над всеми другими.

Уравнение (3) при сначала преобразуется в интегральное уравнение сдвига на величину шага в пространстве $C[-h, 0]$, а потом это пространство расщепляется на одномерное пространство констант и пространство функций, обращающихся в нуль при $t=0$.

Отметим, что в случае автономного уравнения ($P(t)=p=const$) асимптотическое представление решений $W(t; \varphi(\cdot))$ при $t \rightarrow \infty$ дает теория Флоке (см. например, [1], [2]): характеристическое уравнение

$$\lambda = pe^{-\lambda h} \quad (6)$$

имеет бесконечное количество решений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ в комплексной плоскости, таких, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \lambda_k = -\infty$, и решение представимо в виде асимптотического ряда

$$X(t, \varphi(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(\varphi(\cdot)) e^{\lambda_k t}, t \in R_+, \quad (7)$$

где C_k - линейные функционалы от начальной функции.

Отсюда следует, что в автономном случае существуют такие «базовые» решения $\xi_k(t)$, $k=1, 2, 3, \dots$, и константы $\mu_k \rightarrow -\infty$, $k=1, 2, 3, \dots$, что

$$X(t, \varphi(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(\varphi(\cdot)) \xi_k(t), \xi_k(t) = O(e^{\mu_k t}), t \rightarrow \infty, k = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Нами [4] были проведены численные эксперименты, показавшие возможность наличия асимптотических разложений при других условиях на коэффициент $P(t)$. В данной статье такие более широкие условия получены.

2. Операторно-разностные уравнения в расщепленных пространствах. Приведем результаты [3], с уточнениями.

Пусть Ω - некоторое нормированное пространство. Рассмотрим четыре последовательности операторов (первая – просто числа, вторая – «функционалы»):

$$a_n: R \rightarrow R; b_n: \Omega \rightarrow R; c_n: R \rightarrow \Omega; d_n: \Omega \rightarrow \Omega, n=0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

с интервальными ограничениями

$$a_n \in A = [a_-, a_+]; \|b_n\| \leq b > 0, \|c_n\| \leq c > 0, \|d_n\| \leq d > 0,$$

и систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_n x_n + b_n y_n, \\ y_{n+1} &= c_n x_n + d_n y_n, n=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 1. Если $(\forall w > 0)((q_- := [a + b[-w, w]]_- > 0) \wedge (|c + [-w, w]d| \leq wq_-))$, то существуют специальные решения.

Теорема 2. Если $(d < a_-) \wedge ((a_- - d)^2 > 4bc)$, то выполняются условия Теоремы 1 и можно взять $w = (a_- - d - ((a_- - d)^2 - 4bc)^{1/2}) / (2b)$.

Теорема 3. Если $\omega := \sup\{|a_n d_n - b_n c_n| : n=1, 2, 3, \dots\} q_-^{-2} < 1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и специального решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1, существует предел $\gamma\{x, y\} := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / X_n$.

Теорема 4. Если выполняются условия Теорем 2 и 3 и $\omega(a_+ + bw) < 1$, то специальные решения имеют асимптотическое свойство.

В [3] эти теоремы применялись к уравнению вида (3) со сдвигом на один шаг, получены оценки вида (5). Здесь мы предлагаем применить несколько шагов.

3. Оценка с композицией двух шагов. Обозначим

$$Z_m(t) = X(t + mh, \varphi(\cdot)), -h \leq t \leq 0, \quad (11)$$

$$S_m Z(\cdot)(t) = Z(0) + \int_{-h}^t P(s + mh + h) Z(s) ds \quad (12)$$

- интегральные операторы сдвига по траекториям уравнения (3) на шаг h .

Тогда начальная задача (3)-(4) переписывается в виде:

$$Z_0 = \varphi, \quad (13)$$

$$Z_{m+1} = S_m Z_m, m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Если

$$h = 1, P(t) = \begin{cases} p_1 & (0 \leq t < 1), \\ p_2 & (1 \leq t < 2) \end{cases} - \quad (15)$$

периодическая функция с периодом 2, то имеем:

$$X(t) = \varphi(0) + p_1 \int_0^t \varphi(s-1) ds \quad (0 \leq t \leq 1); \quad (16)$$

Сдвигая, получаем

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= X(t+1, \varphi(\cdot)) = \varphi(0) + p_1 \int_0^{t+1} \varphi(s-1) ds = \\ &= \varphi(0) + p_1 \int_{-1}^t \varphi(s) ds \quad (-1 \leq t \leq 0); \\ Z_2(t) &= \left(\varphi(0) + p_1 \int_{-1}^t \varphi(v) dv \right) |_{t=0} + \\ &+ p_2 \int_{-1}^t \left(\varphi(0) + p_1 \int_{-1}^s \varphi(v) dv \right) ds \quad (-1 \leq t \leq 0) = \\ &= \varphi(0) + p_1 \int_{-1}^0 \varphi(v) dv + p_2 (t+1) \varphi(0) + \\ &+ p_2 \int_{-1}^t p_1 \int_{-1}^s \varphi(v) dv ds \quad (-1 \leq t \leq 0). \end{aligned} \quad (17)$$

Производим расщепление:

$$\begin{aligned} Z_2(0) &= \left(\varphi(0) + p_1 \int_{-1}^0 \varphi(v) dv \right) + p_2 \varphi(0) + \\ &+ p_1 p_2 \int_{-1}^0 \int_{-1}^s \varphi(v) dv ds, \end{aligned}$$

$$Z_2(t) - Z_2(0) = p_2 \varphi(0)t + p_1 p_2 \int_0^t \int_{-1}^s \varphi(v) dv ds.$$

В качестве пространства Ω выберем $\{y(t) \in C^{(1)}[-h, 0] : y(0) = 0\}$, с нормой $\|y\|_{\Omega} := \sup\{|y(t)/t| : -h \leq t < 0\}$, тогда $|y(t)| \leq \|y\|_{\Omega} |t|$.

Делаем подстановку $\varphi(t) = \varphi(0) + \psi(t)t$, где $\psi(t)$ — непрерывная

функция.

Обозначая через θ различные числа из $[0, 1]$ и используя интегральную теорему о среднем, получаем:

$$\begin{aligned}
 Z_2(0) &= \varphi(0) + p_1 \int_{-1}^0 (\varphi(0) + \psi(v)v) dv + p_2 \varphi(0) + \\
 &+ p_1 p_2 \int_{-1}^0 \int_{-1}^s (\varphi(0) + \psi(v)v) dv ds = \\
 &= \varphi(0) + p_1 \varphi(0) + p_1 \psi(\theta_1) \int_{-1}^0 v dv + p_2 \varphi(0) - \\
 &- p_1 p_2 \frac{1}{2} \varphi(0) + p_1 p_2 \psi(\theta_2) \int_{-1}^0 \int_{-1}^s v dv ds = \\
 &= \left(1 + p_1 + p_2 - \frac{1}{2} p_1 p_2\right) \varphi(0) - \\
 &- \frac{1}{2} p_1 \psi(\theta_1) - \frac{2}{3} p_1 p_2 \psi(\theta_2).
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем первое уравнение (10) с

$$a = 1 + p_1 + p_2 - \frac{1}{2} p_1 p_2, b = |p_1| \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} |p_2| \right).$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 Z_2(t) - Z_2(0) &= p_2 \varphi(0)t + p_1 p_2 \int_0^t \int_{-1}^s (\varphi(0) + \psi(v)v) dv ds = \\
 &= p_2 \varphi(0)t + p_1 p_2 \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \varphi(0) + \frac{1}{2} p_1 p_2 \psi(\theta_3) \left(\frac{t^3}{3} - t \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем второе уравнение (10)

$$c = |p_2| (1 + |p_1|), d = \frac{1}{2} |p_1 p_2|.$$

Теорема 5. Если $\frac{1}{2} |p_1 p_2| < 1 + p_1 + p_2 - \frac{1}{2} p_1 p_2$ и

$$\left(1 + p_1 + p_2 - \frac{1}{2} p_1 p_2 - \frac{1}{2} |p_1 p_2| \right)^2 > 4 |p_1| \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} |p_2| \right) |p_2| (1 + |p_1|), \quad (18)$$

то специальные решения задачи (3)-(15)-(4) существуют.

Доказательство следует из Теоремы 2.

Отсюда видно, что при достаточно малом по модулю числе p_1 и числе p_2 либо в интервале $(-1; 0)$, либо при положительном и большом специальные решения существуют, что расширяет область (5).

Примечание. Для получения конкретных условий из условий вида (18) и более сложных можно применять компьютер.

Заключение. Из раздела 3 следует, что проведением итераций оператора сдвига по траекториям решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и использованием результатов для систем разностных уравнений можно получать менее ограничительные условия на функции-коэффициенты при неизвестных функциях в уравнениях.

Список использованных источников

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. - Москва: Наука, 1972. - 352 с.
2. Панков П.С. Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения (Минск), 1977, т. 13, № 4. - С. 455-462.
3. Жээнтаева Ж.К. Исследование асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием с помощью расщепления пространства // Инновации в науке / Сборник статей по материалам LVII междунар. научно-практ. конф. № 5 (54). Часть I. Новосибирск: Изд. АНС СиБАК, 2016. – С. 149-154.
4. Жээнтаева Ж.К. Алгоритмы для экспериментального исследования асимптотики решений линейных уравнений с запаздывающим аргументом и их использование // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественно-научного образования: Сборник статей Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. – Москва: Российский университет дружбы народов, 2015. – С. 219-223.

ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСЕВНЫХ ПЛОЩАДЕЙ ПОД СЕЛЬХОЗ КУЛЬТУРЫ С УЧЕТОМ ПОТРЕБНОСТИ ХОЗЯЙСТВА И РЫНКА

Жусупбаева Г . А., Саролдоева А.С., Жусупбаева Н.А.

Кыргызский аграрный университет, Институт математики НАН КР

Өндүрүлгөн айыл чарба продукциялардын бир бөлүгүн чарбанын керектөөсүнө калтырып, калган бөлүгүн базар керектөөчүлөрүнө, ал эми айыл чарба продукциялардын көптөгөн түрүн чарба үчүн атайлап өндүрүү учурларын эске алып эгин аянттарына йыл чарба өсүмдүктөрүнө бөлүштүрүү планын аныктоочу математикалык модель кирешени максималдаштыруу критериясы менен тургузулган.

Урунттуу сөздөр. Математикалык модель, план, продукция. Эгин аянты, чарба, базар, түшүмдүүлүк.

В работе сформулирована математическая модель определения плана распределения посевных площадей под сельхоз культуры для случая, когда часть выращенной сельхоз продукции хозяйство оставляют для своей нужды, а другая часть для реализации рынок сбыта, а также выращивают множество видов сельхоз продукции только для хозяйства по критерию максимума дохода.

Ключевые слова. Математическая модель, план, продукция, посевная площадь, хозяйство, рынок, урожайность.

The paper presents a mathematical model for determining the plan of distribution of acreage for agricultural crops in the case where part of the farm products grown farm leave for their needs, and the other part for the implementation of the market, as well as grow many types of agricultural products only for the economy on the criterion of maximum income.

Keyword. Mathematical model, plan, production, acreage, economy, market, yield

Основной проблемой сельского хозяйства является отсутствие планирования. Без планирования сельское хозяйство всегда будет убыточным , и не будет приносить дохода. Если, предположим, что в каком то году возник дефицит какого-то вида сельхоз продукции, то на следующий год все хозяйства стараются посадить именно этот вид продукции. Появляется переизбыток, и цена на эту продукцию резко падает. При планировании своей деятельности хозяйства должны уметь ориентироваться на то, какую культуру выгоднее сажать в том или ином году, и на какой посевной площади. К сожалению, это умеют делать только 10-15% субъектов сельского хозяйства. Остальные же работают по инерции. При этом приоритетами развития аграрного сектора экономики должны стать оптимизация структур

посевных площадей, развитие кооперации и рынка земли, в частности внедрение и развитие частных рыночных отношений в использовании земель.

Ниже попытаемся сформулировать экономико-математическую модель определения оптимального размера посевной площади под каждый вид культуры для случая, когда часть выращенной сельхоз продукции агрофирма оставляют для своей нужды, а другая часть для реализации на рынок сбыта, а также выращивают множество видов сельхоз продукции для функционирования хозяйства, обеспечивающую хозяйству чистый наибольший доход.

Постановка задачи.

Пусть агрофирма обладает m видов земельных ресурсов с известными размерами посевных площадей $s_i, i = 1, 2, \dots, m$, различной плодородностью почвы. Предполагается, что на этих посевных площадях хозяйства выращивают n видов сельско-хозяйственных культур. Рассмотрим случай когда часть выращенной сельхоз продукции агрофирма предпочитает оставлять для своей нужды и кроме этого выращивается множество сельхоз продукции только для функционирования хозяйства.

Требуется определить план распределения посевных площадей под сельхоз культуры с учетом потребностей хозяйства и рынка так, чтобы доход получаемый хозяйством была максимальной.

Для формализации задачи введем следующие обозначения. Обозначим через i - индекс категории посевных площадей имеющиеся в агрофирме, $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$;

I - множество индексов категории посевных площадей агрофирмы;

j - индекс вида сельхоз культуры $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$;

J - множество индексов сельхоз культуры выращиваемый агрофирмой;

e - индекс рынка реализуемые сельхоз продукции агрофирмы, $e \in L = \{1, 2, \dots, P\}$;

L - множество индексов рынка в регионе;

$\bar{J}$ - множество индексов сельхоз продукции, которые нужны для функционирования агрофирмы.

Известные параметры:

a_{ij} - урожайность j -го вида сельхоз культуры с единицы i -ой категории посевной площади агрофирмы, $i \in I, j \in J \cup \bar{J}$;

c_{je} - оптовая цена единицы объема j -го вида сельхоз продукции на e -ом рынке региона, $j \in J, e \in L$;

c_{ij} - затраты на выращивание сельхоз культуры j -го вида на единицу i -ой категории посевной площади, $i \in I, j \in J$;

c_{ije} - затраты связанные с реализацией единицы объема сельхоз продукции j -го вида выращенный на i -ой категории посевной площади, в e -ом рынке региона, $i \in I, j \in J, e \in L$;

Q_j - объем сельхоз продукции j -го вида выращенный хозяйством только для функционировании агрофирмы, $j \in \bar{J}$;

q_j - объем сельхоз продукции j -го вида необходимы для своей нужды, $j \in J$.

Искомые переменные:

x_{ij} - размер посевной площади под j -ый вид культуры на i -ой категории земли агрофирмы, $i \in I, j \in J \cup \bar{J}$;

x_{ije} - объем сельхоз продукции j -го вида вывозимый из i -ой категории посевной площади в e -ом рынке региона, $i \in I, j \in J, e \in L$;

x_{je} - объем j -го вида сельхоз продукции агрофирмы реализуемой на e -ом рынке региона, $j \in J, e \in L$;

y_{ij} - объем j -го вида сельхоз продукции из i -ой категории посевной площади направляемый на свои нужды, $i \in I, j \in J$;

z_{ij} - объем j -го вида сельхоз продукции из i -ой категории посевной площади направляемый для функционирования агрофирмы, $i \in I, j \in \bar{J}$,

В соответствии с принятыми обозначениями математическая модель выше изложенной проблемы запишется в виде.

$$\sum_{e \in L} \sum_{j \in J} c_{je} x_{je} - \left\{ \sum_{j \in J \cup \bar{J}} \sum_{i \in I} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{e \in L} c_{ije} x_{ije} \right\} \rightarrow \max \quad (1)$$

при условиях

$$a_{ij} x_{ij} = \sum_{e \in L} x_{ije} + y_{ij}, i \in I, j \in J, \quad (2)$$

$$a_{ij} x_{ij} = z_{ij}, i \in I, j \in \bar{J}, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ije} = x_{je}, e \in L, j \in J, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = Q_j, j \in \bar{J}, \quad (5)$$

$$\sum_{j \in J \cup \bar{J}} x_{ij} = S_i, i \in I, \quad (6)$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = q_j, j \in J, \quad (7)$$

$$x_{je} \geq 0, x_{ij} \geq 0, x_{ije} \geq 0, y_{ij} \geq 0, z_{ij} \geq 0, \quad (8)$$

где $\sum_{e \in L} \sum_{j \in J} c_{je} x_{je}$ – доход (выручка) получаемый агрофирмой от реализации сельхоз продукции;

$\sum_{j \in J \cup \bar{J}} \sum_{i \in I} c_{ij} x_{ij}$ – суммарные затраты агрофирмы на выращивание сельхоз культур;

$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{e \in L} c_{ije} x_{ije}$ – суммарные затраты связанные с реализацией выращенной сельхоз продукции.

Ограничение (2) показывает, что объем сельхоз продукции j -ой культуры, выращенной на i -ой категории посевной площади агрофирмы равен сумме сельхоз продукции j -го вида, реализуемой на всех рынках сбыта региона и объему продукции j -го вида сельхоз продукции направляемый для своей нужды;

Система равенства (3) отражает объем сельхоз продукции j -го вида выращенной на i -ой категории посевной площади равен объему направляемый сельхоз продукции j -го вида из этой категории посевной площади для функционирования агрофирмы;

Уравнение (4) отождествляет объем сельхоз продукции j -го вида реализуемый e -ом рынке и суммарный объем сельхоз продукции j -го вида получаемый со всех категории посевных площадях агрофирмы направляемое на e -ый рынок сбыта;

Уравнение (5) определяет, что объем потребности для функционирования агрофирмы по каждому виду сельхоз продукции должен быть обеспечен за счет суммарного объема сельхоз продукции j -го вида получаемый со всех категории посевных площадях агрофирмы;

Уравнение (6) определяет, что посевные площади всех категории, имеющиеся в наличии агрофирмы, должны быть использованы полностью под посевную культуру.

Система равенства (7) требует, что объем потребности по каждому виду сельхоз продукции для своей нужды агрофирма должна быть обеспечена из сельхоз продукции каждого вида выращенной всех категории посевных площадей;

Ограничение (8) требует не отрицательности искомых переменных.

Сформулированная модель может быть использована хозяйствующими субъектами отрасли сельского хозяйства при определении оптимальной схемы распределения, имеющиеся в хозяйстве посевных площадей различной категории под каждый вид сельхоз культур, урожай которых предназначенный на свои нужды и нужды для функционирования хозяйства, а также на рынок для продажи, так чтобы суммарная прибыль, получаемая хозяйством была максимальной.

Экстремальная задача (1)- (8) представляет собой задачу линейного программирования, и она может быть решена предложенным в [1] методом.

Список использованных источников

1. Эшенкулов П., Жусупбаев А., Култаев Т. Методика решения задачи линейного программирования на компьютере // Ош, Ош ГУ, 2004.-61с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕМЕЙСТВ ОБОБЩЕННО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

Сабирова Х. С.

Кыргызско-Узбекский университет

Мурда, автор функциялуу мейкиндиктеги жалпыланган характеристика деген түшүнүктү төмөнкүдөй аныктоону киргизди: чекиттеринде берилген түркүмдүн каалаган функциясынын маанилери өз ара бир түрдүү байланган. Бул макалада ал аныктоо математикалык структуралардын жаңы түрү катары функциялуу мейкиндиктерден каалаган көптүктөргө дагы жалпыланат.

Урунттуу сөздөр: функциялуу мейкиндик, жалпыланган характеристика, көптүктөрдүн түркүмү

Автором ранее были введены определение понятия обобщенной характеристики в функциональном пространстве, как конечного множества точек, в которых значения любой функции из данного семейства единообразно связаны между собой. В данной статье это определение еще обобщается с функциональных пространств на любые множества, как новый вид математических структур.

Ключевые слова: функциональное пространство, обобщенная характеристика, семейство множеств

Earlier, the author proposed the definition of notion of generalized characteristics in a functional space as a finite set of points where values of any function of a given family are mutually depend. In this paper this definition is extended from functional spaces to arbitrary sets.

Keywords: functional space, generalized characteristic, family of sets

1. Постановка задачи. Пусть даны множества X и Y и семейство Ω

функций $u: X \rightarrow Y$, множества X, Y и Ω содержат более одного элемента каждое.

В нашей статье [1] было показано следующее. Если взять и обобщить известное понятие характеристики за основу (независимо от понятия дифференциального уравнения в частных производных), то можно распространить теорию характеристик и на неизмеримые функции, и на функции, определенные на абстрактных множествах. С этой целью нами были введены определения обобщенных характеристик, как соотношений, связывающих между собой значения функций при различных значениях аргумента, и введено определение n -характеристического функционального множества (точные определения приведены ниже, в разделе 3).

В [2] нами на основе введенных определений была предложена единообразная классификация дифференциальных уравнений по семействам их решений. На основе этой классификации было установлено качественное

различие между обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных.

В [3] нами найдены достаточные условия справедливости общей гипотезы: семейство функций, представимых в виде суперпозиции произвольных функций от меньшего числа переменных, и заданных функций, является характеристическим, и получена оценка показателя локальной характеристичности для аналитических исходных данных.

В [4] была рассмотрена наиболее общая постановка различных начальных, начально-краевых, краевых и многоточечных (локальных) задач в теории дифференциальных уравнений:

Пусть дано еще множество $X_0 \subset X$ и дана функция $f_0: X_0 \rightarrow Y$. Требуется найти такую функцию $u \in \Omega$, чтобы ее сужение на X_0 совпадало с f_0 . (Здесь подразумевается, что другие условия на искомые функции u (то, что они являются решениями некоторых уравнений и т.д.) включены в определение семейства Ω).

Аналогичный подход, в рамках теории категорий, предложен в [7].

Можно видеть, что данный подход можно еще расширить. Например, рассмотрим пространство функций $f: R \rightarrow R$. Подпространство Ω линейных функций $f: R \rightarrow R$ является 3-характеристическим функциональным множеством: значения функции для двух различных значений аргумента не связаны между собой, а для любых трех различных значений аргумента - связаны. Отметим, что пространство Ω можно еще эквивалентно определить, как пространство прямых, не параллельных оси OY . Если рассмотреть пространство всех прямых в R^2 , то оно уже не будет функциональным, но подчиняется аналогичной закономерности для трех любых точек.

В связи с этим, мы предлагаем ввести понятие обобщенно-характеристического множества, то есть такого множества, что наборы точек из него удовлетворяли определенным соотношениям.

Отметим, что такие множества также могут определяться неявными алгебраическими или дифференциальными соотношениями, более общими, чем те, которые определяют рассмотренные нами ранее характеристические функциональные множества.

2. Определения и примеры характеристических функциональных множеств. Нами были предложены следующие определения [1].

О п р е д е л е н и е 1. Если существуют такие n -местный предикат C_X , определенный на X^n , и $2n$ -местный предикат C_{XY} , определенный на $X^n \times Y^n$, что

$$\text{Ch1. } (\forall u \in \Omega) (C_X(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow C_{XY}(x_1, \dots, x_n, u(x_1), \dots, u(x_n)))$$

(из связи между значениями аргумента следует связь между значениями функции, возможно, с учетом значений аргумента);

$$\text{Ch2. } (\forall j \in 1..n) (\forall x_j) (\exists x_1) (\exists x_2) \dots (\exists x_{j-1}) (\exists x_{j+1}) \dots (\exists x_n) (C_X(x_1, \dots, x_n))$$

(для любого значения аргумента найдутся другие, связанные с ним);

Ch3. Если в списке $(x_1, \dots, x_n)$ есть равные, то

$$(\neg C_X(x_1, \dots, x_n)) \wedge (\neg C_{XY}(x_1, \dots, x_n, u(x_1), \dots, u(x_n)))$$

(все связанные между собой значения аргумента должны быть различны);

$$\text{Ch4. } (\forall j \in 1..n) ((y_j' \neq y_j) \wedge C_{XY}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_j, \dots, y_n)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\neg C_{XY}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{j-1}, y_j', y_{j+1}, \dots, y_n));$$

(если какой-либо набор значений аргумента и функции связан между собой, то изменение одного из значений функции делает его несвязным);

Ch5. Предикаты C_X и C_{XY} – симметрические в том смысле, что при перестановке аргументов в C_X и одинаковых перестановках первых n аргументов и последних n аргументов в C_{XY} эти предикаты сохраняют свое значение.

Тогда семейство Ω функций называется "не более чем n "-характеристическим функциональным множеством.

Если для семейства Ω функций высказывание "не более чем $(n-1)$ -характеристическое" ложно, то Ω называется " n -характеристическим" функциональным множеством.

Пример 1. Для $X=R^2$, $x = (\xi_1, \xi_2)$, $Y= R$, как обобщение равенства Асгейрссона для решения уравнения колебаний струны (см. например, [6], с. 112), нами установлено следующее.

(Произведен поворот осей координат на 45^0).

Здесь можно взять $n=4$. Предикат C_X записывается в виде

$$C_X(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv C_X((\xi_{11}, \xi_{12}), (\xi_{21}, \xi_{22}), (\xi_{31}, \xi_{32}), (\xi_{41}, \xi_{42})) =$$

"точки x_1, x_2, x_3, x_4 попарно различны и образуют прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат",

или в формальной записи (для попарно неравных точек):

$$C_X((\xi_{11}, \xi_{12}), (\xi_{21}, \xi_{22}), (\xi_{31}, \xi_{32}), (\xi_{41}, \xi_{42})) = \text{(Для некоторой перестановки индексов (1..4)) } ((\xi_{11} = \xi_{21}) \wedge (\xi_{41} = \xi_{31}) \wedge (\xi_{12} = \xi_{42}) \wedge (\xi_{22} = \xi_{32})).$$

Предикат C_{XY} записывается в виде

$C_{XY}(x_1, x_2, x_3, x_4, u(x_1), u(x_2), u(x_3), u(x_4)) \equiv$ "сумма значений функции $u(x)$ в концах одной из диагоналей прямоугольника (x_1, x_2, x_3, x_4) равна сумме значений функции $u(x)$ в концах другой диагонали"

или в формальной записи:

$$\begin{aligned} C_{XY}((\xi_{11}, \xi_{12}), (\xi_{21}, \xi_{22}), (\xi_{31}, \xi_{32}), (\xi_{41}, \xi_{42})) = \\ = "u(\min\{|\xi_{j1}|: j=1..4\}, \min\{|\xi_{j2}|: j=1..4\}) + \\ + u(\max\{|\xi_{j1}|: j=1..4\}, \max\{|\xi_{j2}|: j=1..4\}) = \\ u(\min\{|\xi_{j1}|: j=1..4\}, \max\{|\xi_{j2}|: j=1..4\}) + \\ + u(\max\{|\xi_{j1}|: j=1..4\}, \min\{|\xi_{j2}|: j=1..4\})". \end{aligned}$$

Пример 2 (Дуга окружности). Здесь $n=4$. Определим $u(x) = \sqrt{(a^2 - x^2)}$.

$$C_X(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv "-a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < a".$$

$C_{XY}(x_1, x_2, x_3, x_4, u(x_1), u(x_2), u(x_3), u(x_4)) \equiv$ "углы $(x_1, u(x_1))-(x_2, u(x_2))-(x_4, u(x_4))$ и $(x_1, u(x_1))-(x_3, u(x_3))-(x_4, u(x_4))$ равны между собой".

П р и м е р 3 (Теорема Паскаля, суженная на одну из ветвей эллипса).

Здесь $n=6$. Определим $u(x)=a\sqrt{b^2-x^2}$.

$$C_X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \equiv "-b < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < b",$$

$C_{XY}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, u(x_1), u(x_2), u(x_3), u(x_4), u(x_5), u(x_6)) \equiv "$ точки пересечения прямых $(x_1, u(x_1))-(x_2, u(x_2)) \cap (x_4, u(x_4))-(x_5, u(x_5))$, $(x_2, u(x_2))-(x_3, u(x_3)) \cap (x_5, u(x_5))-(x_6, u(x_6))$, $(x_3, u(x_3))-(x_4, u(x_4)) \cap (x_6, u(x_6))-(x_1, u(x_1))$ лежат на одной прямой".

3. Определения и примеры характеристических множеств. Пусть

даны пространство X с мерой и семейство Ω подмножеств множества X , множества X и Ω и каждое из подмножеств семейства Ω содержат более одного элемента.

О п р е д е л е н и е 2. Если существует такой n -местный симметрический предикат C_X , определенный на X^n , что

Ch5. Множество $\{\{x_1, \dots, x_n\} \subset X^n : C_X(x_1, \dots, x_n)\}$ имеет меру нуль в X^n .

Ch6. $(\forall u \in \Omega) (\{x_1, \dots, x_n\} \subset u) \Rightarrow C_X(x_1, \dots, x_n)$,

то семейство Ω называется "не более чем n "-характеристическим множеством.

Если для семейства Ω высказывание "не более чем $(n-1)$ -характеристическое" ложно, то Ω называется " n -характеристическим" множеством.

Выше ветви окружности и эллипса определялись, как функции. Ниже эти кривые определяются, как точечные множества.

П р и м е р 4 (Окружность). Здесь $X=R^2, z=(x,y) \in X; n=4$. Дифференциальное определение окружности с центром в начале координат: $xdx+udy=0$.

$C_X(z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv "$ углы $z_1-z_2-z_4$ и $z_1-z_3-z_4$ либо равны между собой, либо в сумме составляют π ".

П р и м е р 5 (Теорема Паскаля). Здесь $X=R^2, z=(x,y) \in X; n=6$. Дифференциальное определение кривой второго порядка: $d(xdx/(ydy))=0$.

$C_X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \equiv$ " точки пересечения прямых $z_1-z_2 \cap z_4-z_5, z_2-z_3 \cap z_5-z_6, z_3-z_4 \cap z_6-z_1$ лежат на одной прямой".

4. Действия над характеристическими множествами

4.1. Операция объединения. Некоторые предикаты удовлетворяют условию: Если $C_X(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ и $C_X(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$, то $C_X(x_1, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$. Таким образом, получаем операцию

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) * (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}).$$

К таким предикатам относятся предикаты в примерах 4 и 5.

В соответствии с логическими операциями, над характеристическими условиями можно производить следующие операции для получения вторичных характеристических условий. Пусть даны два предиката $\{n', C'_X\}$ и $\{n'', C''_X\}$ над одним и тем же множеством X .

Обозначим $Per(1..n)$ - множество всех перестановок из n элементов.

4.2. Конъюнкция. Положим $n=n'+n''$,

$$C_X(x_1, \dots, x_{n'}, x_{n'+1}, \dots, x_{n'+n''}) := \bigvee_{Per(1..n)} (C'_X(x_1, \dots, x_{n'}) \wedge C''_X(x_{n'+1}, \dots, x_{n'+n''}));$$

4.3. Дизъюнкция. Положим $n=n'+n''$,

$$C_X(x_1, \dots, x_{n'}, x_{n'+1}, \dots, x_n) := \bigvee_{Per(1..n)} (C'_X(x_1, \dots, x_{n'}) \vee C''_X(x_{n'+1}, \dots, x_n)).$$

4. Заключение. Из выше изложенного видно, что понятие обобщенных характеристических соотношений является новым видом математических структур, дает единообразный подход к различным вопросам не только теории функций и дифференциальных уравнений, но и теории измеримых множеств в целом, дает новые постановки задач.

Список использованных источников

1. Панков П.С., Матиева Г.М., Сабирова Х.С. Аксиоматическая теория характеристик и ее применение к аналитическим функциям // Исследования по

интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 37-42.

2. Сабирова Х.С. Классификация дифференциальных уравнений по характеристическим свойствам их решений // Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики: тез.докл. международной научной конференции. - Алматы: КазНУ, 2005. - С. 167.

3. Панков П.С., Сабирова Х.С. Составление функционально-характеристических уравнений с аналитическими функциями // Вестник КазНТУ им. Сатпаева, 2006. - № 5. – С. 135-141.

4. Сабирова Х.С. Корректность постановок задач для функций нескольких переменных и обобщенные характеристики // Международный научный журнал «Наука, Образование, Техника». № 3, 4 (37-38), Ош. 2011.

5. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. – Москва: Мир, 1966. – 351 с.

6. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. - Москва: Изд-во АН СССР, 1959. - 164 с.

7. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж., Маматжан уулу Э. Элементы категории уравнений // Настоящий выпуск, с. 88-95.

MSC 49M37

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО СПОСОБА ПРОИЗВОДСТВА СЕЛЬХОЗ ПРОДУКЦИИ АГРОФИРМЫ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМУМА ДОХОДА

Жусупбаев Н.А, Турганбаева Ж., Маатов К.

Институт математики НАН КР

Агрофирманын кирешесин максималдуу боло тургандай мүмкүнчүлүгүн аныктоочу өндүрүштүн технологиялык ыкмасын аныктоо маселесине математикалык модель тургузулган. Маселени чыгаруу ыкмасы сандык мисалда көрсөтүлгөн.

Урунттуу сөздөр. Математикалык модель, айыл-чарба продуктулары, өндүрүүш, керектөө, базар, келишим баа, чыгым.

Сформулирована математическая модель задачи определения технологического способа производства сельхоз продукции агрофирмы, позволяющий максимизировать доход. Способ решения продемонстрирован на числовом примере.

Ключевые слова. Математическая модель, сельхозпродукция, производства потребления, рынок, договорная цена, расход.

We formulated a mathematical model of the problem to determine the technological mode of production of agricultural products of the agricultural firm, to maximize the income. The solution method is demonstrated by a numerical example.

Keywords. Mathematical model, agricultural products, production consumption, market, contract price, consumption.

Постановка задачи. Пусть в регионе имеется агрофирма, имеющая возможность производить m видов сельхоз продукции в зависимости от технологическими способами в размере q_i^r , $r \in R = \{1, 2, \dots, \bar{R}\}$, $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$. За планируемый период хозяйству необходимо производить сельхоз продукции в объеме P_i продукции вида i , $i \in I$ для личного потребления и для расхода на внутренние нужды хозяйства, а также в зависимости от технологического способа производства в объеме ε_{ir} продукции вида i , $i \in I$ направляется для реализации по договорному обязательству и для рынка.

Требуется определить технологический способ производства продукции агрофирмы удовлетворяющей потребности по собственной и хозяйственной нужды и поставкам по договорному обязательству, а также реализации на рынок так, что получаемый доход хозяйства была максимальным.

Для математической формулировки задачи введем следующие обозначение:

I - множество индексов вида продукции, производимой агрофирмой;

i - индекс вида продукции, производимой агрофирмой, $i \in I$;

r -индекс возможного вида технологического способа производства агрофирмы, $r \in R = \{1, 2, \dots, \bar{R}\}$;

R - множество индексов технологического способа производства агрофирмы;

q_i^r - объем производства i -го вида продукции агрофирмы по r -ой технологического способа производства $i \in I, r \in R$;

ε_{ir} - объем реализуемое сельхоз продукции i -го вида производимой по r -ой технологического способа производства агрофирмы $i \in I, r \in R$;

P_i - объем i -го вида сельхоз продукции для личного потребления и расходы на внутренние нужды агрофирмы $i \in I$;

y_{ir} - булевы переменные, принимающие значение 0 или 1, определяющие вид технологического способа производства агрофирмы, $r \in R$;

c_{ir} - расход на производство i -го вида сельхоз продукции по r -му технологическому способу производства агрофирмы, $r \in R$;

z_{ir} - оплата за труд рабочим по r -му технологическому способу производства; ap_{ir} - арендная плата по r -му технологическому способу производства; s_{ir} - страховые платежи; ao_{ir} - амортизационные отчисления; k_{ir} - сумма в счет погашения процентов по кредитам; np_{ir} - прочие расходы;

D_{ir} - размер денежной выручки от реализации продукции i -го вида по r -му технологическому способу производства агрофирмы, $r \in R$;

d_i - оптовая цена единицы объема продукции i -го вида на рынке сбыта, $i \in I$;

m_i - доля i -ой продукции, реализуемый по договорной цене $i \in I$;

μ_i - договорная цена на i -го вида продукции, $i \in I$.

В соответствии с принятыми обозначениями математическая модель вышеизложенной проблемы запишется в следующем виде.

Найти максимум

$$L(y) = \sum_{r \in R} \sum_{i \in I} (((\varepsilon_{ir} - m_i) d_i + m_i \mu_i) - c_{ir}) y_{ir}, \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{r \in R} (q_i^r - \varepsilon_{ir}) y_{ir} \geq p_i, \quad i \in I, \quad (2)$$

$$\sum_{r \in R} y_{ir} = 1, \quad i \in I, \quad (3)$$

где $y = \{y_{ir} : i \in I, r \in R\}$, $c_{ir} = z_{ir} + ap_{ir} + s_{ir} + ao_{ir} + k_{ir} + np_{ir}$, $i \in I, r \in R$.

Целевая функция (1) определяет чистый доход агрофирмы от реализации продукции;

Ограничение (2) требует, что объем каждого вида производимой хозяйством сельхоз продукции по выбранному технологическому способу производства должна быть больше, чем суммарный объем сельхоз продукции, направляемый для личного потребления, внутренние нужды агрофирмы и поставкам по договорному обязательству, а также на рынок сбыта;

Условие (3) указывает, что агрофирма для производства i -го вида продукции должна выбрать только один технологический способ производства.

Проверим работоспособность математической модели (1)-(3) на тестовом примере.

Пусть числовые данные заданы (в тоннах) в виде следующей матрицы:

- объем производства каждого вида продукции согласно технологического способа производства:

$$|q_i^r|_{3,3} = \begin{pmatrix} q_1^1 & q_1^2 & q_1^3 \\ q_2^1 & q_2^2 & q_2^3 \\ q_3^1 & q_3^2 & q_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 & 1000 & 1600 \\ 800 & 600 & 1100 \\ 3150 & 1200 & 1150 \end{pmatrix};$$

- расходы на производства продукции:

$$|c_{ir}|_{3,3} = \begin{pmatrix} 696300 & 352000 & 640000 \\ 2316800 & 2430000 & 3757600 \\ 6605550 & 1896000 & 1703150 \end{pmatrix};$$

- объем сельхоз продукции для личного потребления и расходы на внутренние нужды (в тоннах):

$$|p_i|_{1,3} = (p_1 \ p_2 \ p_3) = (50, 90, 130,);$$

- объем реализуемой сельхоз продукции:

$$|\varepsilon_{ir}|_{3,3} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 & 900 & 1500 \\ 700 & 500 & 1000 \\ 3000 & 1000 & 950 \end{pmatrix};$$

- объем реализуемой продукции на договорной основе (в тоннах):

$$|m_i|_{1,3} = (m_1 \ m_2 \ m_3) = (200, 50, 100,);$$

- оптовая цена единицы объема продукции (в тыс.сомах/тонн):

$$|d_i|_{1,3} = (d_1 \ d_2 \ d_3) = (10, 12, 10);$$

- договорная цена на единицы продукции (в тыс.сомах/тонн):

$$|\mu_i|_{1,3} = (\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3) = (10, 8, 10).$$

Используя значение известных параметров ε_{ir} , m_i , μ_i , $i = 1, 2, 3$, $r = 1, 2, 3$.

определим матрицу: $|D_{ir}|_{3,3}$ коэффициентов y_r в целевой функции (1) по формуле

$$D_{ir} = ((\varepsilon_{ir} - m_i)d_i + m_i\mu_i) - c_{ir}, \quad i = 1, 2, 3, \quad r = 1, 2, 3.$$

Имеем

$$|D_{ir}|_{3,3} = \begin{pmatrix} 9303700 & 8648000 & 14360000 \\ 5883200 & 3370000 & 8042400 \\ 23394450 & 8104000 & 7796850 \end{pmatrix}.$$

Построим числовую модель задачи.

Найти максимум

$$L(y) = 9303700y_{11} + 8648000y_{12} + 14360000y_{13} + 5883200y_{21} + 3370000y_{22} + 8042400y_{23} + 23394450y_{31} + 8104000y_{32} + 7796850y_{33} \quad (4)$$

при условиях

$$100y_{11} + 100y_{12} + 100y_{13} \geq 50, \quad 100y_{21} + 100y_{22} + 100y_{23} \geq 90, \quad (5)$$

$$150y_{31} + 200y_{32} + 200y_{33} \geq 130, \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^3 y_{ir} = 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Числовую модель задачи (4)-(6) можно представить в виде следующей таблицы.

Таблица

y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{31}	y_{32}	y_{33}		
100	100	100							$\geq$	50
			100	100	100				$\geq$	90

						150	200	200	$\geq$	130
1	1	1							=	1
			1	1	1				=	1
						1	1	1	=	1
93037	8648	143600	58832	33700	80424	233944	81040	77968	$\rightarrow$	max

Получим решение задачи (4)-(6), используя программы на языке Pascal ABC[1], т.е

$$y = \{y_{11} = 1, y_{23} = 1, y_{31} = 1\},$$

$$L(y) = 45796850.00 \text{ сомов.}$$

Список использованных источников

1. Эшенкулов П., Жусупбаев А. Решение общей задачи линейного программирования. Программа на языке Pascal ABC// Свидетельство Кыргыз-патента №1030 (учебное пособие). Зарегистрировано в Государственном реестре КР объектов авторского права 2 мая 2008г.

MSC 54E15, 54C10

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ТИПА КОМПАКТНОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Канетов Б.Э., Байгазиева Н.А., Канетова Д.Э.,

Институт математики НАН КР, КНУ им. Ж. Баласагына, ЖАГУ

Күчтүү бир калыштуу паракомпактуу мейкиндиктер изилденет. Күчтүү бир калыштуу паракомпактуу мейкиндиктердин чектүү аддитивдүү ачык жабдуулардын, чагылдыруулардын жана компактификациялардын жардамы аркылуу мүнөздөмөлөрү тургузулат, ошондой эле тихоновдук мейкиндиктердин компактуулук касиеттери бир калыштуу структуралардын жардамы менен мүнөздөлөт.

Урунттуу сөздөр: Бир калыштуу мейкиндик, топологиялык мейкиндик, жабдуу, күчтүү бир калыштуу паракомпактуу мейкиндик.

Исследуются сильно равномерно паракомпактные пространства. В частности, устанавливаются характеристики сильно равномерно паракомпактных пространств при помощи конечно аддитивных открытых покрытий, отображений и компактификаций, также

охарактеризуется свойства компактности тихоновских пространств при помощи равномерных структур.

Ключевые слова: Равномерное пространство, топологическое пространство, покрытие, сильно равномерно паракомпактное пространство.

We study strongly uniformly paracompact spaces. In particular, the characteristics of strongly uniformly paracompact spaces are established using finitely additive open covering, mappings and compactifications, the properties of compactness of Tychonoff spaces with the help of uniform structures are also characterized.

Key words: Uniform space, topological space, covering, strong uniform paracompact space.

Звездно конечное [3], [4], [6] равномерно σ -локально конечное покрытие [2], [8] равномерного пространства (X, U) называется равномерно σ -звездно конечным покрытием.

Равномерное пространство (X, U) называется сильно равномерно паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие.

Предложение 1. Если (X, τ) сильно паракомпактно, то равномерное пространство (X, U^*) с максимальной равномерностью U^* является сильно равномерно паракомпактным.

Доказательство легко следует из того факта, что множество всех открытых покрытий образует базу максимальной равномерности.

Предложение 2. Всякое сильно равномерно паракомпактное пространство (X, U) является равномерно паракомпактным.

Доказательство. Пусть равномерное пространство (X, U) является сильно равномерно паракомпактным. Тогда для каждого открытого покрытия λ пространства (X, U) можно вписать равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие α . Поскольку любое равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие является равномерно σ -локально конечным открытым покрытием [8], то пространство (X, U) является равномерно паракомпактным.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие сильной равномерной паракомпактности.

Теорема 1. Для равномерного пространства (X, U) следующие условия равносильны:

1. (X, U) - сильно равномерно паракомпактно;
2. (X, U) - равномерно паракомпактно и топологическое пространство (X, τ_U) сильно паракомпактно.

Доказательство. $1. \Rightarrow 2.$ это очевидно.

$2. \Rightarrow 1.$ Пусть λ - произвольное открытое покрытие пространства (X, U) . В покрытие λ впишем звездно конечное открытое покрытие α пространства (X, τ_U) . Поскольку равномерно пространство (X, U) равномерно паракомпактно, то в покрытие α впишем равномерно σ -локально конечное открытое покрытие $\beta = \{\beta_i : i \in N\}$ пространства (X, U) . Для каждого $B_{\beta_i} \in \beta_i$ выберем такое $A_{B_{\beta_i}} \in \alpha$, что $B_{\beta_i} \subset A_{B_{\beta_i}}$. Положим $\alpha_i = \{A_{B_{\beta_i}} : B_{\beta_i} \in \beta_i\}$. Ясно, что $\beta_i \succ \alpha_i$. Тогда $\alpha_0 = \{\alpha_i : i \in N\}$ есть открытое покрытие, являющееся счетным объединением подсемейств пространства (X, U) . Легко видеть, что последнее является звездно конечным покрытием. Покажем, что α_0 является равномерно σ -локально конечным открытым покрытием. Для любого $i \in N$ существует такое равномерно покрытие $\gamma_{\beta_i} \in U$, что $|St_{\beta_i} \Gamma_{\beta_i}| < \aleph_0$ для любого $\Gamma_{\beta_i} \in \gamma_{\beta_i}$. Пусть $B_{\beta_i} \in St_{\beta_i} \Gamma_{\beta_i}$. Поскольку $\beta_i \succ \alpha_i$, то для любого $B_{\beta_i} \in \beta_i$ существует такое $A_{B_{\beta_i}} \in \alpha_i$, что $B_{\beta_i} \subset A_{B_{\beta_i}}$. В силу звездно конечности покрытия α_0 имеем, что $|St_{\alpha_0} A_{\beta_i}| < \aleph_0$. Отсюда следует, что $|St_{\alpha_0} B_{\beta_i}| < \aleph_0$ для любого $B_{\beta_i} \in St_{\beta_i} \Gamma_{\beta_i}$. Тогда $|St_{\alpha_0} \beta_i(\Gamma_{\beta_i})| < \aleph_0$, т.е. $|St_{\alpha_0} \Gamma_{\beta_i}| < \aleph_0$ для любого $\Gamma_{\beta_i} \in \gamma_{\beta_i}$. Следовательно, подсемейство α_i является равномерно локально конечным. Значит, покрытие α_0 является звездно конечное и равномерно σ -локально конечное, т.е. равномерно σ -звездно конечным открытым покрытием, вписанным в открытое покрытие λ . Итак, равномерно пространство (X, U) является сильно равномерно паракомпактным.

Следствие 1. Всякое равномерно паракомпактное пространство (X, U) , топологическое пространство (X, τ_U) которого локально компактно, является сильно равномерно паракомпактным.

Следствие 2. Любое равномерно локально компактное пространство (X, U) , для которого топологическое пространство (X, τ_U) сильно паракомпактно, является сильно равномерно паракомпактным.

Следствие 3. Любое компактное пространство является сильно равномерно паракомпактным.

Следующая теорема является равномерным аналогом теоремы А.В. Архангельского [1] о сильной паракомпактности всякой локально компактной топологической группы.

Теорема 2. Любое равномерно локально компактное пространство (X, U) является сильно равномерно паракомпактным.

Доказательство. Любое равномерно локально компактное пространство (X, U) [9] является равномерно паракомпактным и его топологическое пространство (X, τ_U) является сильно паракомпактным. Тогда согласно теореме 1 равномерное пространство (X, U) является сильно равномерно паракомпактным.

Следствие 4. Любое равномерно локально компактное пространство (X, U) является сильно равномерно R -паракомпактным.

Следствие 5. Любое сильно равномерно $P(B)$ -паракомпактное пространство (X, U) является сильно равномерно паракомпактным.

Предложение 3. Всякое сепарабельно метризуемое равномерное пространство является сильно равномерно паракомпактным.

Доказательство. Поскольку всякое сепарабельно метризуемое равномерное пространство (X, U) является равномерно $P(B)$ -паракомпактным, то равномерное пространство (X, U) является сильно равномерно паракомпактным.

Следствие 6. Любое сильно равномерно R -паракомпактное пространство (X, U) является сильно равномерно паракомпактным.

Не полные сепарабельно метризуемые пространства [2] не являются сильно равномерно R -паракомпактными [5].

Следующая теорема является характеристикой сильно равномерно паракомпактных пространств, при помощи конечно аддитивных открытых покрытий.

Теорема 3. Для равномерного пространства (X, U) следующие условия равносильны:

1. (X, U) - сильно равномерно паракомпактно;
2. В любое конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) можно вписать равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие.

Доказательство. $1. \Rightarrow 2.$ Пусть (X, U) - сильно равномерно паракомпактное пространство и α - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие. В него впишем равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие β пространства (X, U) . Следовательно, пространство (X, U) сильно равномерно паракомпактно.

$2. \Rightarrow 1.$ Пусть в любое конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) можно вписать равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие. Покажем, что (X, U) является сильно равномерно паракомпактным пространством. Пусть α - произвольное открытое покрытие. В силу сильно равномерной паракомпактности (X, U) в конечно аддитивное открытое покрытие $\alpha^\perp$ впишем равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие β пространства (X, U) . Следовательно, пространство (X, U) сильно равномерно паракомпактно.

В качестве следствия из этой теоремы получаем теорему Д.К. Мусаева [5] о сильно равномерно R -паракомпактных пространствах.

Следствие 7. Для равномерного пространства (X, U) следующие условия равносильны:

1. (X, U) - сильно равномерно R -паракомпактно;
2. в любое конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) можно вписать равномерно звездно конечное открытое покрытие.

Теорема 4. Пусть (X, U) - равномерное пространство, cX - некоторая компактификация пространства (X, τ_U) . Для того, чтобы равномерное пространство (X, U) было сильно равномерно паракомпактным, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта C из нароста $cX \setminus X$ существовало равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие α такое, что множества $cl_{cX} A$ и C имеют пустые пересечения для любого $A \in \alpha$.

Доказательство. Необходимость. Пусть (X, U) - сильно равномерно паракомпактно и C - произвольное компактное множество нароста $cX \setminus X$. Тогда для каждой точки $x \in X$ существует такая открытая в cX окрестность U_x , что $cl_{cX} U_x \cap C = \emptyset$. Положим $\beta = \{U_x \cap X : x \in X\}$. Ясно, что последнее является открытым покрытием пространства (X, U) . Поскольку равномерное пространство (X, U) сильно равномерно паракомпактно, то в β впишем равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие γ . Тогда множество $cl_{cX} (\cup_{i=1}^n (U_{x_i} \cap X))$ содержит замыкание множества Γ и само содержится в $\cup_{i=1}^n cl_{cX} U_{x_i}$. Откуда $cl_{cX} \Gamma \cap C = \emptyset$ для любого $\Gamma \in \gamma$.

Достаточность. Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства (X, U) . Тогда существует открытое семейство γ в cX такое, что $\gamma \wedge \{X\} = \alpha$. Через C обозначим дополнение множества $\cup \gamma$ до cX . Тогда C - компакт, поэтому существует такое равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие β , что множества $cl_{cX} B$ и C имеют пустые пересечения для любого $B \in \beta$. Компакт $cl_{cX} B$ лежит в cX , поэтому существуют $\Gamma_i \in \gamma$ такие, что $cl_{cX} B \subset \cup_{i=1}^n \Gamma_i$. Тогда $B \subset \cup_{i=1}^n A_i$, где $\cup_{i=1}^n A_i \in \alpha$. Положим $\alpha_i = \{\alpha_i^0 : i \in N\}$, где $\alpha_i^0 = \{B \cap A_i : i = 1, 2, \dots, n\}$. Легко видеть, что α_0 есть равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие пространства (X, U) , вписанное в α .

Данная теорема является равномерным аналогом теоремы Х. Тамано [10] для сильно паракомпактных пространств.

Следствие 8. Пусть (X, U) - равномерное пространство, cX - некоторая компактификация пространства (X, τ_U) . Для того, чтобы равномерное пространство (X, U) было сильно равномерно R -паракомпактным, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта C на $cX \setminus X$ существовало равномерно звездно конечное открытое покрытие α такое, что множества $cl_{cX} A$ и C имеют пустое пересечение для любого $A \in \alpha$.

Следующая теорема показывает эквивалентность трех различных вариантов сильной равномерной паракомпактности [7] в классе $\aleph_0$ -ограниченных равномерных пространств [2].

Теорема 5. Для $\aleph_0$ -ограниченного равномерного пространства (X, U) следующие свойства равносильны:

1. Сильно равномерно P -паракомпактно;
2. Сильно равномерно B -паракомпактно;
3. Сильно равномерно паракомпактно;
4. Топологическое пространство (X, τ_U) линделёфово.

Доказательство легко следует из следующих лемм.

Лемма 1. Если для равномерного пространства (X, U) его топологическое пространство (X, τ_U) линделёфово, то равномерное пространство (X, U) является сильно равномерно P -паракомпактным.

Доказательство. Поскольку пространство (X, τ_U) - линделёфово, то оно сильно паракомпактно. Согласно лемме 2.10 (см. [8]) равномерное пространство (X, U) является равномерно P -паракомпактным. Следовательно, равномерное пространство (X, U) является сильно равномерно P -паракомпактным.

Лемма 2. Если равномерное пространство (X, U) сильно равномерно паракомпактно и $\aleph_0$ -ограничено, то топологическое пространство (X, τ_U) является линделёфовым.

Доказательство. Пусть λ - открытое покрытие пространства (X, τ_U) . Тогда существует равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие $\alpha = \{\alpha_i : i \in N\}$, вписанное в λ . Поскольку $\alpha = \{\alpha_i : i \in N\}$ звездно конечно и равномерно σ -локально конечно, то для каждого $i \in N$ существует $\beta_i \in U$ такое, что каждый элемент которого пересекается лишь с конечным числом элементов семейства α_i . Для каждого $i \in N$, каждый элемент семейства α_i имеет не пустое пересечение с некоторым элементом покрытия β_i . Отсюда следует, что семейство α_i не более счетное, т.е. покрытие $\alpha = \{\alpha_i : i \in N\}$ - счетное. Значит, топологическое пространство (X, τ_U) является линделёфовым.

Следствие 9. Для тихоновского пространства (X, τ) следующие свойства эквивалентны:

1. Топологическое пространство (X, τ) линделёфово;
2. Для каждой равномерности U такой, что $\tau_U = \tau$, равномерное пространство (X, U) является сильно равномерно P -паракомпактным;
3. Для каждой равномерности U такой, что $\tau_U = \tau$, равномерное пространство (X, U) является сильно равномерно B -паракомпактным;
4. Для каждой равномерности U такой, что $\tau_U = \tau$, равномерное пространство (X, U) является сильно равномерно паракомпактным.

В следующем предложении показывается сохранение сильной паракомпактности в сторону прообраза ω -отображениями.

Предложение 4. Если для каждого открытого покрытия ω равномерного пространства (X, U) существует равномерно непрерывное отображение $\omega : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ равномерного пространства (X, U) на сильно равномерно паракомпактное пространство (Y, V) , то равномерное пространство (X, U) является сильно равномерно паракомпактным.

Доказательство. Пусть ω открытое покрытие пространства (X, U) и $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ - ω -отображение равномерного пространства (X, U) на сильно равномерно паракомпактное пространство (Y, V) . Тогда для каждой точки $y \in Y$

существует окрестность U_y , прообраз которого содержится в некотором элементе покрытия ω . Через β обозначим множества всех окрестностей U_y точек $y \in Y$. Поскольку (Y, V) сильно равномерно паракомпактно, то в β можно вписать равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие α . Тогда легко видеть, что $f^{-1}\alpha$ равномерно σ -звездно конечное открытое покрытие, вписанное в ω . Следовательно, равномерное пространство (X, U) является сильно равномерно паракомпактным.

Следующее утверждение доказывает, что топология сильно равномерно паракомпактного пространства является сильно паракомпактной.

Предложение 5. Если равномерное пространство (X, U) сильно равномерно паракомпактно, то его топологическое пространство (X, τ_U) сильно паракомпактно.

Доказательство. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - ω -отображение пространства X на сильно паракомпактное пространство Y . Тогда существует открытое покрытие λ пространства Y такое, что покрытие $f^{-1}\lambda$ вписано в покрытие ω . Если γ - звездно конечное открытое покрытие, вписанное в λ , тогда покрытие $f^{-1}\gamma$ есть звездно конечное открытое покрытие, вписанное в покрытие ω .

Равномерное пространство (X, U) называется μ -полным если всякий фильтр Коши имеющий базу мощности $\leq \mu$ сходится в нем. $\aleph_0$ -полные пространства называются секвенциально полными.

Топологическое пространство X называется μ -компактным если каждое его открытое покрытие мощности $\leq \mu$ содержит конечное подпокрытие. $\aleph_0$ -компактные пространства называются счетно компактными.

Лемма 3. Тихоновское пространство X является μ -компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X, U) является μ -полным.

Доказательство. Пусть тихоновское пространство (X, τ) является μ -компактным и F фильтр Коши пространства (X, U) имеющий базу, мощности

$\leq \mu$. Тогда F имеет точку прикосновения пространства (X, U) . Так как в равномерном пространстве понятия точка прикосновения и предельные точки равносильны, то отсюда следует сходимость F в (X, U) . Значит, (X, U) является μ -полным.

Обратно, пусть F - произвольный ультрафильтр, имеющий предбазу мощности $\leq \mu$ и (X, U) - любое такое равномерное пространство, что $\tau_U = \tau$. Тогда существует такая предкомпактная равномерность U_p , что $\tau_{U_p} = \tau_U = \tau$. Ясно, что F является фильтром Коши в (X, U_p) . Следовательно, он сходится к некоторой точке пространства (X, U_p) . Таким образом, ультрафильтр F имеющий предбазу мощности $\leq \mu$, сходится в (X, τ) .

Теорема 6. Тихоновское пространство X является компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X, U) является секвенциально полным и сильно равномерно паракомпактным.

Доказательство следует из леммы 3 и следствия 9.

Список использованных источников

1. Архангельский А.В. О совпадении размерности $indG$ и $\dim G$ // Докл. СССР. - 1960. - Т.132. - №5. - С. 980-981.
2. Борубаев А.А. Равномерная топология. - Бишкек: Илим, 2013. - 347 с.
3. Канетов Б.Э. Сильно равномерно паракомпактные пространства // Изв. НАН КР. - 2012. - № 2. - С. 109-113.
4. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек, 2013. - 160 с.
5. Мусаев Д.К. Равномерно суперпаракомпактные, вполне паракомпактные и сильно паракомпактные равномерные пространства // Докл. РУз. - 2004. - №4. С. 3-9.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. - Москва: Мир, 1986. - 752 с.
7. Kanetov B.E., Baigazieva N.A. Strong uniform paracompactness // In International Conference "International Conference on Analysis and Applied Mathematics"

- (ICAAM 2018), AIP Conference proceedings. Vol. no. 1997, American institute of Physics. - 2018. - P. 1-6.
8. Pasyukov B.A., Buhagiar D. On uniform paracompactness // Czech. Math. J. - 1996. - V.46 (121). - P. 577-586.
9. Rice M.D. A note on uniform paracompactness // Proc. Amer. Math. Soc. - 1977. - Vol. 62. - № 2. - P. 359-362.
10. Tamano H. On paracompactness // Pacific. J. Math. - 1960. - Vol. 10. - P. 1043-1047.

MSC 97U40

ОПЫТ ПРОВЕДЕНИЯ ИНТЕРНЕТ-СОРЕВНОВАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ С ИНДИВИДУАЛЬНЫМИ ЗАДАНИЯМИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Назарбаев Ф.Т.

Средняя школа № 68 г. Бишкек

Автордун пикири боюнча, ар түрдүү математикалык предметтер боюнча студенттердин билимин жана жалпы компетенциясын эң эффектүү жана калыс (кезектеги жана жыйынтык) көзөмөлдөө математика боюнча комплекстик электрондук экзамен аркылуу жүзөгө ашырыла алат; ал экзамен түзүүчүлүк, сейректик, сырдуулук принциптеринин жана “жалпыланган маселе” аныктамасынын негизинде курулду.

Урунттуу сөздөр: электрондук экзамен, комплекстик экзамен, жалпыланган маселе, интерактивдүү маселе, түзүүчүлүк, сейректик, сырдуулук, математика

По мнению автора, наиболее эффективный и объективный контроль знаний и общей компетенции студента по различным математическим дисциплинам (как текущий, так и итоговый) может быть осуществлен при помощи комплексного электронного экзамена по математике, построенного на основе принципов формируемости, уникальности, конфиденциальности и понятия обобщенной задачи.

Ключевые слова: электронный экзамен, комплексный экзамен, обобщенная задача, интерактивная задача, формируемость, уникальность, конфиденциальность, математика
In the author's opinion, the most effective and objective monitoring of students' knowledge and general competence in various mathematical subjects (both current and final) can be implemented by means of complex electronic examination on mathematics built on the base of principles of generativity, uniqueness, confidentiality and general definition of “parameterized task”.

Key words: electronic examination, complex examination, parameterized task, interactive task, generativity, uniqueness, confidentiality, mathematics

Введение. В статье описана разработанная в Кыргызстане с участием автора система методик и компьютерных программ, дающая возможность

разнообразного контроля знаний по различным разделам математики, с проверкой не только знаний, умений и навыков, но и логического мышления и интуиции, исключая предварительное заучивание ответов и другие способы нарушения объективности и способствующая творческой работе преподавателей математических дисциплин. Также описано ее использование для проведения соревнований для учащихся в масштабах Кыргызстана.

1. Обзор публикаций по автоматизации контроля знаний. Насколько известно, в педагогической практике тестирование с закрытыми ответами впервые было применено во второй половине XIX века в Великобритании: давались вопросы и ряд ответов к каждому из них, от учащихся требовалось выбрать правильный ответ.

Такие формализованные тесты (также называемые тестами множественного выбора) для контроля знаний начали широко использоваться в первой четверти XX века. В это же время были разработаны механические и электромеханические устройства для ускорения проведения и автоматизации обработки результатов тестирования.

С появлением компьютеров в массовом пользовании в 70-е годы XX века были разработаны соответствующие программные средства. При этом выявились недостатки такой методики, например [1]: «появляются программы — тестовые оболочки, которые, по мнению их создателей, можно одинаково успешно наполнить любым материалом (от геометрии до географии) ... Пользователям таких тестовых оболочек остается составить банк контрольных заданий по своим дисциплинам с несколькими вариантами ответов к каждому заданию. Применение получающихся контролирующих программ насаждает крайне негативную методику проверки знаний с выбором ответа из списка, содержащего заведомо неверные утверждения, причем часть из них обычно провоцирует учащихся совершать типичные ошибки. Такая методика неоднократно подвергалась справедливой критике ... и не имеет никаких иных причин существования, кроме неумения программировать.»

В связи с этим, в 1980-е годы начал развиваться способ программирования на компьютере *«случайного формирования заданий»*, *«параметризованных вопросов»* для отдельных дисциплин, см. например [2], [3]. В 1990-е годы такой способ был обобщен в некоторых публикациях, например [4], [5], [6].

В ходе развития этого способа, с нашим участием, был разработан следующий комплекс требований к компьютерному контролю знаний, для обеспечения требований объективности, валидности и надежности:

- **Формируемость:** задание в полном виде не существует до начала экзамена (аналогичный термин *«фасеточность»*: задание комбинируется из случайных элементов);
- **Уникальность:** все экзаменуемые получают разные задания (аналогичный термин - *«параллельность»*).
- **Полная конфиденциальность:** до оценки компьютером ответа экзаменуемого, никто (в том числе и составители задач, и организаторы) не знает правильных ответов на предложенные задания.
- **Представительность:** компьютерная тестирующая программа должна быть формой не только контроля, но и представления знаний.
- **Конкретность:** ответ должен быть в виде числа (точного или приближенного), слова, действия, с однозначно определенным результатом.
- **Способ оценивания приближенного ответа:** требовать вычисление ответа *«с точностью $E = 0.1$ или $0.01 \dots$ »*, а оценивать его по правилу: если $|X - X_0| < 2E$, где X – ответ, данный экзаменуемым, а X_0 – точный ответ или ответ, вычисленный компьютером с большой точностью, то засчитывается полный балл.

Для реализации этих требований были предложены определения:

"Обобщенная задача" – это алгоритм для получения нескольких однотипных задач с выбором параметров, исходными данными для алгоритма являются случайные числа, выбираемые в некоторых диапазонах; "настраиваемая обобщенная задача" - исходными данными для алгоритма являются диапазоны,

выбираемые (преподавателем) в рамках некоторых базовых диапазонов, и случайные исходные данные, выбираемые в выбранных диапазонах.

В этих определениях, не умаляя общности, можно считать, что данные диапазоны являются диапазонами целых чисел. По целым числам, используя математические операции и понятие массива, можно также получить исходные данные в виде дробных чисел, векторов, матриц, многочленов для математики, а также варьировать логические условия задач.

2. Понятие комплексного экзамена. До публикации [7] термин “комплексный экзамен” понимался как соединение нескольких экзаменов по дисциплинам, входящим в одно направление или специализацию. В [7] было отмечено, что наличие и возможности современной компьютерной техники и существующие у современных студентов навыки по ее использованию позволяют автоматизировать комплексную проверку знаний.

Было предложено определение[8]-[10]. Компьютерный комплексный экзамен – это программное обеспечение (ПО – ниже), позволяющее проводить всесторонний контроль знаний, умений и навыков по дисциплине, с возможностью выбора и настройки преподавателями (организаторами соревнования) различных типов заданий, автоматическим подведением итогов, уникальности заданий для каждого испытуемого (участника соревнования).

ПО также должно содержать шифрование ответов на выданные (распечатанные) задачи для их хранения до выдачи по специальному запросу (для проведения официальных экзаменов);

Возможны следующие опции при работе ПО.

- Вид задания - на дисплее или письменный (распечатка).
- Допускается ли повторная попытка при неправильном ответе.
- Показывается ли правильный ответ при неправильном ответе.
- Нужен ли ввод пароля преподавателя, показывать ли окончательный результат учащемуся или только преподавателю (экзаменатору).

- Проверка: - самим студентом (самоконтроль), то есть использование ПО в учебных целях; - преподавателем по выдаваемой вместе с текстами распечатке ответов (текущий контроль); - экзаменаторами после окончания экзамена и сдачи всех письменных работ (занесения всех ответов в компьютер) по распечатке ответов, которая выдается по специальному запросу, с фиксацией времени выдачи (вступительный или итоговый экзамен, соревнование).

3. Примеры обобщенных задач по математике. Задачи «традиционного» типа.

Здесь, кроме непосредственной проверки знания соответствующего правила (формулы), в большинстве задач мы предлагаем выполнение и других действий, с целями: обеспечить целочисленность результата; сделать набор получающихся задач более разнообразным.

3.1. Сделать вычисление с результатом – обыкновенной дробью и ввести сумму целой части и «минимально возможных» числителя и знаменателя, например $(3125 + 7/189)/2$.

3.2. Найти сумму членов арифметической прогрессии, например $4+7+10+13+\dots+304$.

3.3. Найти бесконечную сумму убывающей геометрической прогрессии, например $1350+450+150+50+\dots$

3.4. Вычислить определитель третьего порядка.

3.5. Решить систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными и найти сумму компонент решения.

В последних двух задачах можно не программировать их решения, а двигаться от готового ответа к условию.

3.6. Найти меньший корень / больший корень / разность большего и меньшего корней квадратного уравнения (в разных его записях).

3.7. Найти значение производной данной функции (многочлена) в данной точке.

3.8. Найти значение определенного интеграла от данной функции (многочлена) по данному отрезку.

Чтобы проверить знание формул объемов круглых тел и избежать употребления числа π в ответе (в соответствии с требованием конкретности), предлагается

3.9. Алгоритм (неформально). Выбираются два объекта из четырех: конус, цилиндр, шар, полушар. Требуется вычислить отношение объема первого тела к объему второго. Параметры первого тела являются кратными параметрам второго тела, так что ответ получается целочисленным, например:

«Найти отношение объема конуса с высотой 5 и радиусом основания 20 к объему полушара с радиусом 5».

Приведем тип интерактивных задач, которые реализуются только на компьютере. Общая задача: имеется некоторая функция со скрытыми параметрами и есть возможность запросов, выбираемых самим экзаменуемым, о значениях функции в задаваемых точках. Найти скрытые параметры или какие-либо свойства функции.

3.10. «Вам нужно найти решение уравнения $F(X) = 0$ с точностью до 0.01, где $F(X)$ - монотонная непрерывная функция. Для этого Вы можете запрашивать значения функции $F(X)$ при любых значениях аргумента».

Повторять: Вывести «Введите значение X или 0 для выхода»;
после ввода «0» - «Введите Ваше решение».

4. Использование компьютерных комплексных экзаменов. По алгоритмам, часть из которых была описана выше, были написаны программы на языке *pascal*, и на их основе - программы на языке *Delphi*, обеспечивающие дружелюбный интерфейс. Пользователь может выбирать один из трех языков: кыргызский, русский, английский для получения задания.

С помощью этих программ в течение ряда лет проводятся открытые Интернет-олимпиады КРСУ по прикладной математике. Так, в 2017 году участвовали 72 студента из вузов г. Бишкек, г. Ош и г. Жалал-Абад.

5. Заключение. Автор выражает благодарность П.С.Панкову за руководство данной разработкой, сотрудникам Управления образования г. Бишкек, преподавателям КРСУ, КНУ, КГТУ, Ош ТУ, участвовавшим в организации, и студентам, которые участвовали в соревнованиях.

Список использованных источников

1. Бурковская М.А. Зимина О.В., Кириллов А.И. Компьютерный контроль знаний в среде Academia XXI // Информатика и образование. – 2002, № 9. - С. 81-87.
2. Панков П.С., Саадабаев А.С. Мектеп окуучулардын XXI бүткүлсоюздукматематикалыколимпиадасы // Эл агартуу, 1987, № 10. - 29-34-б.
3. Панков П.С. Обучающая и контролирующая программа по словоизменению в кыргызском языке на ПЭВМ. - Бишкек: Мектеп, 1992. - 20 с.
4. Kashy E., Sherrill B. M., Tsai Y., Thaler D., Weinshank D., Engelmann M., Morrissey D. J. CAPA, an integrated computer assisted personalized assignment system // American J. Phys. 61 (12), 1993, pp. 1124-1130.
5. Демушкин А.С., Кириллов А.И., Сливина Н.А., Чубров Н.А., Кривошеев А.О., Фомин С.С. Компьютерные обучающие программы // Информатика и образование. 1995. - № 3.
6. Панков П.С., Джаналиева Ж.Р. Опыт и перспективы использования комплекса UNIQTEST уникальных тестовых заданий в учебном процессе // Образование и наука в новом геополитическом пространстве: Тез.докл. научно-практической конференции. – Бишкек: МУК, 1995. - С. 217.
7. Панков П.С., Джаналиева Ж.Р. Проектирование и развитие программных экзаменационных комплексов по математике и физике // Образование в XXI веке: ценности и перспективы: Материалы Междун. научно-практ.конф. Часть 2. - Бишкек: КАО, 2001. - С. 281-284.
8. Панков П.С., Копеев Ж.Б., Кусманов К. Разработка концепции компьютерного комплексного экзамена и его содержание для информатики и математики // Вестник МУК, 2012, № 1 (21) - С.15-19.

9. Панков П.С., Джаналиева Ж.Р. Экзаменующая программа со случайным выбором заданий извне // Вестник ОшГУ. Серия физико-матем. наук. – 2003. - № 7. – С. 174-177.

10. Кусманов К.Р., Копеев Ж.Б., Назарбаев Ф.Т. Опыт использования комплексных компьютерных экзаменов по математике и информатике // Материалы Международной научной конференции молодых ученых, магистрантов, студентов и школьников «XV Сатпаевские чтения», том 19. – Павлодар, 2015. – С. 283-290.